VETORES E ÁLGEBRA VETORIAL

MARCELO DIAS PASSOS

Resumo. Estas notas foram digitadas durante os cursos de MATB34 (Geometria Analítica e Álgebra Vetorial) em 2021 (semestres 2021.1 e 2021.2).

1. Segmentos Orientados

Os segmentos orientados são os objetos geométricos que formalizam as "setas".

Definição 1. *Um* ***segmento orientado*** *é um par ordenado (A, B) onde A e B são pontos (do espaço). O ponto que aparece na primeira coordenada do segmento orientado é chamado de* ***origem*** *e aquele que aparece na segunda coordenada é chamado de* ***extremidade****.*

Observação 1. *Para fixarmos notação, se A e B são pontos distintos, diremos que:*

(1) $\overline{AB}$ é o ***segmento de reta*** *de extremidades A e B, e*

(2) $\overleftrightarrow{AB}$ é a ***reta*** *determinada por A e B.*

Sendo assim, temos que $\overline{AB} = \overline{BA}$ e $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$, enquanto $(A, B) \neq (B, A)$.

Definição 2. *Qualquer segmento orientado do tipo (A, A) é chamado de* ***nulo****.*

Definição 3. *Diremos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são* ***colineares*** *se, e somente se, existe reta r tal que $A, B, C, D \in r$.*

Imediatamente da definição acima concluímos que:

Proposição 1. *Sejam A, B, C e D pontos. Então:*

(1) (A, A) e (C, C) são colineares,

(2) se $A \neq B$, então (A, B) e (C, C) são colineares se, e somente se, $C \in \overleftrightarrow{AB}$, e

(3) se $A \neq B$ e $C \neq D$, então (A, B) e (C, D) são colineares se, e somente se, $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$. $\square$

Demonstração. (1) Se $A = C$, qualquer reta que passe por A testemunha que (A, A) e (C, C) são colineares. Se $A \neq C$, então A e C determinam a reta $\overleftrightarrow{AC}$ e daí $A, C \in \overleftrightarrow{AC}$.
(2) Suponhamos que $A \neq B$.

Se (A, B) e (C, C) são colineares, podemos fixar uma reta r tal que $A, B, C \in r$. Por outro lado A e B determinam uma única reta e conclui-se que $r = \overleftrightarrow{AB}$. Portanto $C \in \overleftrightarrow{AB}$. Para provar a recíproca basta perceber que, se $C \in \overleftrightarrow{AB}$, então $A, B, C \in \overleftrightarrow{AB}$ e assim (A, B) e (C, C) são colineares.
(3) Suponhamos $A \neq B$ e $C \neq D$.

Se $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$, então $A, B, C, D \in \overleftrightarrow{AB}$ e deduzimos que (A, B) e (C, D) são colineares.

Agora suponhamos que (A, B) e (C, D) sejam colineares e tomemos r, reta, que testemunha tal suposição. Como A e B pertencem a r e determinam uma única reta, concluímos que $r = \overleftrightarrow{AB}$. Mas também C e D pertencem a r e determinam uma única reta. Logo $\overleftrightarrow{CD} = r = \overleftrightarrow{AB}$. $\square$

Definição 4. *O* ***comprimento de um segmento orientado*** *é a distância entre sua origem e sua extremidade.*

Todo segmento orientado nulo tem comprimento **zero** e esses são os únicos com esta propriedade.

Definição 5. *Sejam (A, B) e (C, D) dois segmentos não-nulos. Diremos (A, B) tem* ***mesma direção*** *que (C, D) se, e somente se, $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$.*

Date: 2021.

Vale lembrar que as retas r e s são ditas **paralelas** se, e somente se, existe um mesmo plano que as contenha e além disso $r = s$ ou $r \cap s = \emptyset$.

Definição 6. *Sejam (A, B) e (C, D) dois segmentos não-nulos de mesma direção. Diremos que (A, B)* ***tem mesmo sentido que*** *(C, D) se, e somente se:*

(1) (A, B) e (C, D) ***não são*** *colineares e os segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$* ***não se encontram****; ou*
(2) (A, B) e (C, D) ***são*** *colineares e a semirreta de origem em A e determinada por B está contida ou contem a semirreta de origem C e determinada por D.*

Uma vez que um segmento orientado é como formalizamos uma "seta", *segmentos orientados não-nulos de mesmo sentido* são "setas paralelas apontando para o mesmo lado"!

Definição 7. *Dois segmentos orientados não-nulos de mesma direção, que* ***não*** *têm mesmo sentido, serão ditos de* ***sentidos opostos****.*

Definição 8. *Se (A, B) e (C, D) são segmentos orientados, diremos que (A, B)* ***é equipolente a*** *(C, D) se, e somente se:*

(1) $A = B$ e $C = D$, ou
(2) $A \neq B$, $C \neq D$ e (A, B) têm mesmos comprimento, direção e sentido que (C, D).

Denotaremos esta situação por " $(A, B) \sim (C, D)$ ".

É importante notar que um segmento orientado **nulo** é equipolente a somente outro segmento orientado nulo.

A comparação entre segmentos orientados definida por "$\sim$" é um exemplo do que será oportunamente chamado de **relação**. Além disso, esta relação também é exemplo de **relação de equivalência** porque:

(1) $(A, B) \sim (A, B)$, para qualquer segmento orientado (A, B). Quando uma relação satisfaz essa condição é chamada de **relação reflexiva**;
(2) se $(A, B) \sim (C, D)$, então $(C, D) \sim (A, B)$, para quaisquer segmentos orientados (A, B) e (C, D). Nesse caso a relação é dita **relação simétrica**; e
(3) se $(A, B) \sim (C, D)$ e $(C, D) \sim (E, F)$, então $(A, B) \sim (E, F)$, para quaisquer segmentos orientados (A, B), (C, D) e (E, F). Essa condição é definição para uma **relação transitiva**.

Toda relação, que é simultaneamente reflexiva, simétrica e transitiva, é chamada de relação de equivalência! Os comentários do parágrafo anterior provaram que:

Proposição 2. *A relação de equipolência é relação de equivalência.* $\square$

Proposição 3. *Sejam A, B e C, pontos. Se $(A, B) \sim (A, C)$, então $B = C$.*

Demonstração. Suponhamos que $(A, B) \sim (A, C)$.

Se $A = B$, então (A, B) é nulo, (A, C) também deve ser nulo e consequentemente $C = A = B$. Estudemos o caso no qual $A \neq B$. Nesse caso, (A, C) não pode ser nulo e daí $A \neq C$. Como (A, B) tem mesma direção que (A, C), deduzimos que $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{AC}$. Mas duas retas paralelas têm ponto em comum somente quando são coincidentes e têm-se que $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. Como a distância de A até B é a mesma que de A até C e as "setas estão apontando para o mesmo lado", temos que $B = C$. $\square$

Exercício 1. *Sejam A, B, C e D, pontos. Mostre que:*

(1) se $(A, B) \sim (C, D)$, então $(B, A) \sim (D, C)$;
(2) se $(A, B) \sim (C, B)$, então $A = C$.

Teorema 4. *Sejam A, B e C, pontos. Existe um único ponto X tal que $(A, B) \sim (C, X)$.*

Demonstração. Se $A = B$, basta tomar $X = C$. Suponhamos $A \neq B$. Existe uma única reta r tal que $r // \overleftrightarrow{AB}$ e $C \in r$. Seja x a distância de A até B. Em r existem exatamente dois pontos de r que distam x de C. Somente um deles "aponta" para o mesmo lado que (A, B) e seja X esse ponto. Logo $(A, B) \sim (C, X)$.

Se Y é tal que $(A, B) \sim (C, X)$ e $(A, B) \sim (C, Y)$, teremos que $(C, X) \sim (C, Y)$. Pela proposição 3, $X = Y$. $\square$

2. Vetores

Definição 9. ***O vetor determinado pelo segmento orientado*** *(A, B) é o conjunto de todos os segmentos orientados (do espaço) equipolentes a (A, B). Denotaremos tal conjunto por $\overrightarrow{AB}$. O **vetor nulo** – denotado por $\overrightarrow{0}$ – é o vetor determinado por um (ou qualquer) segmento orientado nulo.*

Dado que todo vetor é um conjunto de segmentos orientados mutualmente equipolentes, é comum dizer que um vetor é uma **classe de equipolência**.

Imediatamente temos que:

(1) $(A, B) \in \overrightarrow{AB}$,
(2) $(X, Y) \in \overrightarrow{AB}$ se, e somente se, $(X, Y) \sim (A, B)$,
(3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, $(A, B) \sim (C, D)$, e
(4) se $\overrightarrow{v}$ é um vetor arbitrário, então $(A, B) \in \overrightarrow{v}$ se, e somente se, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$.

Por causa do último item, cada *elemento* de um vetor *determina* ou **representa** o vetor! Por isso cada elemento de um vetor será chamado de **representante** do vetor. Sendo assim, desenharemos *representantes* de um vetor e não propriamente o vetor em si. O próximo teorema vai mostrar que um vetor admite reprensentante com origem em qualquer ponto do espaço.

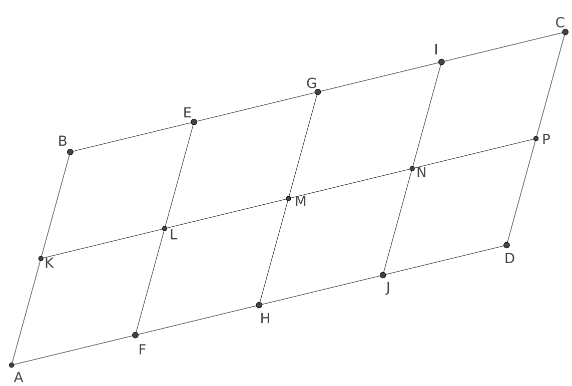
Teorema 5. *Sejam A um ponto e $\overrightarrow{v}$ um vetor. Existe um único ponto B tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.*

Demonstração. Como $\overrightarrow{v}$ é um classe de equipolência, existem C e D, pontos, tais que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$. Pelo teorema 4, existe único ponto B tal que $(A, B) \sim (C, D)$. Sendo assim, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Suponhamos que E é ponto tal que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{v}$. Logo $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}$ e $(A, E) \sim (A, B)$. Pela proposição 3, $E = B$ e concluímos a unicidade. □

Corolário 1. *Todo vetor é um conjunto infinito.*

Demonstração. Por absurdo, seja $\overrightarrow{v}$ um vetor que é um conjunto finito de segmentos orientados 2 a 2 (mutualmente) equipolentes. Seja $\mathcal{O}$ o conjunto das origens dos segmentos orientados que representam $\overrightarrow{v}$. Naturalmente $\mathcal{O}$ também é finito. Como o conjunto dos pontos do espaço é infinito, existe A que é ponto do espaço e **não** é ponto de $\mathcal{O}$. Pelo teorema anterior, existe ponto B, tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$. Nesse caso, $(A, B) \in \overrightarrow{v}$ e deveríamos ter $A \in \mathcal{O}$, o que gera uma contradição. □



Exercício 2. *Dado que qualquer vetor tem **infinitas** maneiras de ser descrito ou representado, escreva os vetores a seguir de todas as maneiras possíveis, usando somente os pontos da figura ao lado. (Por exemplo, $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{EE} = \overrightarrow{FF} = \ldots$ e assim por diante.)*

(1) $\overrightarrow{AB}$	(5) $\overrightarrow{DH}$	(9) $\overrightarrow{EH}$
(2) $\overrightarrow{AK}$	(6) $\overrightarrow{MA}$	(10) $\overrightarrow{EP}$
(3) $\overrightarrow{AF}$	(7) $\overrightarrow{NC}$	(11) $\overrightarrow{EN}$
(4) $\overrightarrow{HF}$	(8) $\overrightarrow{LJ}$	(12) $\overrightarrow{JE}$

Exercício 3. *Sejam A, B, C, D e E, pontos. Prove que:*
(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (2) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} \Longrightarrow \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$

Definição 10. *Se (A, B) é representante do vetor $\overrightarrow{v}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ – denotado por $-\overrightarrow{v}$ – será chamado de **vetor oposto de** $\overrightarrow{v}$.*

Imediatamente temos que $-\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ e que $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$ se, e somente se, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Ainda $-(-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$.

Definição 11. *Os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ serão ditos **paralelos** ou **de mesma direção** – denota-se por $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$ – se, e somente se, um deles é nulo **ou** ambos são não-nulos e todos os representantes de $\overrightarrow{u}$ têm mesma direção que aqueles que representam $\overrightarrow{v}$.*

Sendo assim, por definição, o vetor nulo tem mesma direção que qualquer vetor. Observe que "ter mesma direção é uma relação transitiva entre os vetores não nulos" mas **não** podemos dizer o mesmo quando tomamos **todos os vetores**. Por quê?

Definição 12. *Os vetores paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão ditos* ***de mesmo sentido*** *se, e somente se, um deles é nulo* ***ou*** *ambos são não-nulos e todos os representantes de $\vec{u}$ têm mesmo sentido que aqueles que representam $\vec{v}$.*

Vetores paralelos que não têm mesmo sentido serão ditos ***de sentidos contrários****.*

Portanto o vetor nulo tem mesmo sentido que qualquer vetor. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, observa-se que $-\vec{v}//\vec{v}$ mas $\vec{v}$ e $-\vec{v}$ têm sentidos contrários.

Observação 2. *Se tomamos somente vetores não nulos e mutualmente paralelos, observamos que "ter mesmo sentido" é uma relação transitiva mas o mesmo* ***não*** *pode ser estabelecido quando incluímos o vetor nulo nesta comparação.*

Ainda, se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são todos não nulos, $\vec{u}$ tem mesmo sentido que $\vec{v}$ e $\vec{v}$ tem sentido contrário ao de $\vec{w}$, então $\vec{u}$ tem sentido contrário ao de $\vec{w}$.

Exercício 4. *Mostre que, para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários se, e somente se, $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ têm mesmo sentido.*

Definição 13. *A* ***norma*** *(****módulo****,* ***comprimento*** *ou* ***tamanho****) de um vetor é o comprimento de um (qualquer) dos seus representantes. A norma do vetor $\vec{v}$ será denotada por $\|\vec{v}\|$. Um vetor é* ***unitário*** *quando, e somente quando, tiver norma* 1.

Observa-se que $\left\|\vec{0}\right\| = 0$ e que $\|\vec{v}\| = 0$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$. Ainda $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

3. Soma de vetor a ponto

Definição 14. *Sejam P um ponto e $\vec{v}$ um vetor. A* ***soma de*** P ***com*** $\vec{v}$ *é o (único) ponto Q tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ – e será denotado por " $P + \vec{v}$ ".*

Escreveremos " $P - \vec{v}$ " para $P + (-\vec{v})$. Imediatamente temos que $P + \vec{0} = P$ e $P - \vec{0} = P$; enquanto $P + \vec{v} = P$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$.

Proposição 6. *Sejam A e B, pontos, e $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores. Temos:*

(1) se $A + \vec{u} = A + \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$,
(2) $(A + \vec{v}) - \vec{v} = A$, e
(3) se $A + \vec{v} = B + \vec{v}$, então $A = B$.

Demonstração. (1) Suponhamos $A + \vec{u} = A + \vec{v} = C$. Logo $\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
(2) Seja $D = A + \vec{v}$. Daí $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $-\vec{v} = \overrightarrow{DA}$. Portanto $(A + \vec{v}) - \vec{v} = D + (-\vec{v}) = D + \overrightarrow{DA} = A$.
(3) Se $A + \vec{v} = B + \vec{v}$, então, pelo item anterior, $A = (A + \vec{v}) - \vec{v} = (B + \vec{v}) - \vec{v} = B$. □

Proposição 7. *Para $\vec{u}, \vec{v}$, vetores ambos não-nulos e de mesmo comprimento, têm-se que $\vec{u}//\vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = -\vec{v}$.*

Demonstração. Se $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = -\vec{v}$, então $\vec{u}//\vec{v}$. Resta-nos provar uma implicação. Suponhamos $\vec{u}//\vec{v}$. Fixemos um ponto A e sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$. Logo $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{AC}$ e consequentemente $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. Dado que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, o ponto A equidista de B e C. Como A, B e C estão alinhados, ou $B = C$ ou A é ponto médio do segmento de reta $\overline{BC}$. Se $B = C$, então $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Se A é ponto médio de $\overline{BC}$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$, ou seja, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{v}$. □

Exercício 5. *Mostre que, para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, têm-se $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = -\vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores paralelos e de mesmo comprimento.*

4. A estrutura algébrica

Definição 15. *Sejam $\vec{v}$ um vetor e α um número real.* ***O produto de*** α ***por*** $\vec{v}$ *– denotado por $\alpha\vec{v}$ – é o vetor determinado da seguinte maneira:*

(1) se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$;
(2) se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\alpha > 0$, então $\alpha\vec{v}$ é o vetor de mesma direção e mesmo sentido que $\vec{v}$, tal que $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$;
(3) se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\alpha < 0$, então $\alpha\vec{v}$ é o vetor de mesma direção de $\vec{v}$ e sentido contrário ao de $\vec{v}$, tal que $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$.

Como os números reais são normalmente chamados de **escalares**, chamamos a **ação** que acabamos de definir também de **multiplicação (ou produto) por escalar** e $\alpha\vec{v}$ de **múltiplo escalar**. Induzimos que $\alpha\vec{v}//\vec{v}$ e que $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$ em qualquer situação.

A construção de $\alpha\vec{v}$, para $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, é justificada pelo seguinte:
(1) Sejam $x = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$ e A, B, pontos, tais que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
(2) Seja $C \in \overleftrightarrow{AB}$, tal que a distância de A até C é x e C está no mesmo lado que B com relação ao ponto A.
Logo $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CA}$ têm mesma direção de $\vec{v}$ e comprimento x. Ainda $\overrightarrow{AC}$ tem mesmo sentido que $\vec{v}$, enquanto $\overrightarrow{CA}$ tem sentido contrário ao de $\vec{v}$. A construção estabeleceu **um** vetor com as propriedades requeridas. Seja $\vec{u}$ tal que $\vec{u}//\vec{v}$ e $\|\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$. Naturalmente $\|\vec{u}\| = x$. Pela proposição 7, temos que $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ ou $\vec{u} = -\overrightarrow{AC}$. Se $\vec{u}$ tiver mesmo sentido que $\vec{v}$, então $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$; caso contrário, $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$.

Podemos concluir rapidamente que, para qualquer vetor $\vec{v}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:
(1) $1\vec{v} = \vec{v}$ e $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$.
(2) $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$,

Proposição 8. *Para $\vec{v}$, vetor, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$.*

Demonstração. Se $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\alpha\beta = 0$, vale que $\alpha(\beta\vec{v}) = \vec{0} = (\alpha\beta)\vec{v}$. Suponhamos $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\alpha\beta \neq 0$. Logo $\vec{v}$, $\alpha(\beta\vec{v})$ e $(\alpha\beta)\vec{v}$ são paralelos entre si e todos não nulos. Como $\alpha(\beta\vec{v})$ e $(\alpha\beta)\vec{v}$ têm mesmo comprimento $|\alpha\beta| \cdot \|\vec{v}\|$, deduzimos que $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$ ou $\alpha(\beta\vec{v}) = -\big((\alpha\beta)\vec{v}\big)$, pela proposição 7. Estudemos os casos:
(1) Caso $\alpha < 0 < \beta$, temos que $(\alpha\beta)\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários. Como $\beta\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido, $\alpha(\beta\vec{v})$ e $\beta\vec{v}$ têm sentidos contrários, segue que $\alpha(\beta\vec{v})$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários. Portanto $(\alpha\beta)\vec{v}$ e $\alpha(\beta\vec{v})$ têm mesmo sentido.
(2) O caso $\beta < 0 < \alpha$ é análogo ao anterior.
(3) Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, então $\vec{v}$, $\beta\vec{v}$, $\alpha(\beta v)$ e $(\alpha\beta)\vec{v}$ têm mesmo sentido.
(4) Suponhamos $\alpha < 0$ e $\beta < 0$. Daí $\vec{v}$ e $(\alpha\beta)\vec{v}$ têm mesmo sentido. Sabe-se que $\alpha(\beta\vec{v})$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido, pois $\beta\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários e $\alpha(\beta\vec{v})$ e $\beta\vec{v}$ têm sentidos contrários.

Em qualquer dos casos, $\alpha(\beta\vec{v})$ e $(\alpha\beta)\vec{v}$ têm mesmo sentido e portanto vale a igualdade. □

Definição 16. *Dados o vetor $\vec{v}$ e o real $\alpha \neq 0$, definimos o vetor $\frac{\vec{v}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\vec{v}$. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, daremos o nome de **versor de** $\vec{v}$ para o vetor $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.*

Exercício 6. *Sejam $\vec{u}$, vetor, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mostre que:*
(1) $-(\alpha\vec{v}) = (-\alpha)\vec{v} = \alpha(-\vec{v})$.
(2) Se $\beta \neq 0$, então $\frac{\alpha\vec{v}}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\vec{v}$ e $\frac{\beta\vec{v}}{\beta} = \vec{v}$.

Proposição 9. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e , vetores, e $\alpha \in \mathbb{R}$, não nulo. Então $\alpha\vec{u} = \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\alpha}$.*

Demonstração. Suponhamos $\alpha\vec{u} = \vec{v}$. Daí

$$\vec{u} = 1\vec{u} = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right)\vec{u} = \frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{u}) = \frac{1}{\alpha}\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\alpha} .$$

Reciprocamente, se $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\alpha}$, então

$$\alpha\vec{u} = \alpha\left(\frac{\vec{v}}{\alpha}\right) = \left(\alpha\frac{1}{\alpha}\right)\vec{v} = 1\vec{v} = \vec{v} .$$

□

Exercício 7. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$, vetores, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mostre que:*
(1) se $\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v}$ e $\alpha \neq 0$, então $\vec{u} = \vec{v}$, e
(2) se $\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v}$, então $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{v}$.

Proposição 10. *Sejam $\vec{v}$ um vetor não nulo e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se $\alpha\vec{v} = \beta\vec{v}$, então $\alpha = \beta$.*

Demonstração. Suponhamos que $\alpha\vec{v} = \beta\vec{v}$. Naturalmente $|\alpha| \cdot \|\vec{v}\| = |\beta| \cdot \|\vec{v}\|$ e, dado que $\|\vec{v}\| \neq 0$, conclui-se que $|\alpha| = |\beta|$. Estudemos os casos:
(1) Se $\alpha = 0$, então $\beta = 0$. Daí $\alpha = \beta$.

(2) Caso $\alpha > 0$, têm-se $\beta \neq 0$. Dado que $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido, têm-se que $\beta\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido. Portanto $\beta > 0$ e $\beta = |\beta| = |\alpha| = \alpha$.
(3) Caso $\alpha < 0$, têm-se $\beta \neq 0$. Dado que $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários, têm-se que $\beta\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários. Portanto $\beta < 0$, $-\beta = |\beta| = |\alpha| = -\alpha$ e $\alpha = \beta$. □

Corolário 2. *Sejam $\vec{v}$ um vetor e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se $\alpha\vec{v} = \beta\vec{v}$, então $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\alpha = \beta$.* □

Proposição 11. *Sejam $\vec{v}$ um vetor não-nulo e $\vec{u}$ um vetor qualquer. Temos que $\vec{u}//\vec{v}$ se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.*

Demonstração. Se $\vec{u}$ é múltiplo escalar de $\vec{v}$, certamente $\vec{u}//\vec{v}$. Agora suponhamos que $\vec{u}//\vec{v}$. Se $\vec{u} = \vec{0}$, temos que $\vec{u} = 0\vec{v}$. Suponhamos que $\vec{u} \neq \vec{0}$. Como $\vec{0} \neq \vec{u}//\vec{v} \neq \vec{0}$, temos que $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}//\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ e têm mesmo comprimento (ambos são unitátios). Pela proposição 7, temos que $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ ou $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = -\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Sendo assim,

$$\vec{u} = \left(\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\right)\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = -\left(\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\right)\vec{v}.$$

Em ambos os casos, $\vec{u}$ é múltiplo escalar de $\vec{v}$. □

Corolário 3. *Sejam $\vec{v}$ e $\vec{u}$ vetores. Temos que $\vec{u}//\vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u}$ é múltiplo escalar de $\vec{v}$ ou $\vec{v}$ é múltiplo escalar de $\vec{u}$.* □

Corolário 4. *Sejam A, B e X pontos tais que $A \neq B$. São equivalentes:*
(1) $X \in \overleftrightarrow{AB}$,
(2) $\overrightarrow{AX}//\overrightarrow{AB}$ e
(3) existe $\lambda \in \mathbb{R}$, único, tal que $X = A + \lambda\overrightarrow{AB}$.

Demonstração. Suponhamos $X \in \overleftrightarrow{AB}$. Se $X = A$, logo $\overrightarrow{AX} = \vec{0}$, que é paralelo a $\overrightarrow{AB}$. Se $X \neq A$, então $\overleftrightarrow{AX} = \overleftrightarrow{AB}$ e têm-se $\overrightarrow{AX}//\overrightarrow{AB}$.

Se $\overrightarrow{AX}//\overrightarrow{AB}$, pela proposição anterior, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Portanto $X = A + \overrightarrow{AX} = A + \lambda\overrightarrow{AB}$. Se $\mu \in \mathbb{R}$ é tal que $X = A + \mu\overrightarrow{AB}$, obtemos que $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB} = \mu AB$. Pela proposição 10, $\lambda = \mu$.

Suponhamos que $X = A + \lambda\overrightarrow{AB}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Daí $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Se $X = A$, então $X =\in \overleftrightarrow{AB}$. Caso $X \neq A$, temos que o segmento orientado (A, X) é paralelo ao segmento orientado (A, B) e daí $\overleftrightarrow{AX}//\overleftrightarrow{AB}$. Dado que A é ponto comum às duas retas, $\overleftrightarrow{AX} = \overleftrightarrow{AB}$ e $X \in \overleftrightarrow{AB}$. □

Obervamos que, nas condições do último corolário:
(1) $X = A$ se, e somente se, $\lambda = 0$,
(2) $X = B$ se, e somente se, $\lambda = 1$,
(3) X está entre A e B se, e somente se, $0 < \lambda < 1$,
(4) A está entre X e B se, e somente se, $\lambda < 0$, e
(5) B está entre X e A se, e somente se, $\lambda > 1$.

Exercício 8. *Sejam $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ pontos distintos de uma reta que estejam nesta ordem igualmente espaçados. Sejam $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{t} = \overrightarrow{GD}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AI}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CH}$. Determine o que se pede:*
(1) A em função de B e $\vec{s}$
(2) C em função de E e $\vec{s}$
(3) H em função de C e $\vec{s}$
(4) A em função de I e $\vec{t}$
(5) B em função de C e $\vec{t}$
(6) $\overrightarrow{AJ}$ em função de $\vec{t}$
(7) $\overrightarrow{DA}$ em função de $\vec{u}$
(8) G em função de H e $\vec{u}$
(9) C em função de A e $\vec{u}$
(10) $\overrightarrow{DF}$ em função de $\vec{v}$
(11) D em função de J e $2\vec{v}$
(12) $\vec{v}$ em função de $\vec{u}$

Definição 17. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Fixado um ponto A, sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. Definimos o vetor $\overrightarrow{AC}$ como sendo " $\vec{u} + \vec{v}$ ", **a soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$**.*

Se fixamos E, ponto, e tomamos $F = E + \vec{u}$ e $G = F + \vec{v}$, temos que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$. Portanto, o cálculo da soma de vetores **independe** da escolha do primeiro ponto como "ponto de partida". Sendo assim, se X, Y e Z são pontos, temos que $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.

Proposição 12. *Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, temos:*

(1) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$,
(2) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$,
(3) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, *e*
(4) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Demonstração. Fixemos A e seja $B = A + \vec{u}$. Daí $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$,

$$\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u} \qquad \text{e} \qquad \vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Sejam $C = B + \vec{v}$ e $D = A + \vec{v}$. Logo $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ e, consequentemente, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Portanto,

$$\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Seja $E = C + \vec{w}$ e temos que $\vec{w} = \overrightarrow{CE}$. Daí

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})\ .$$

□

Exercício 9. *Prove que, se A é ponto, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, então $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$.*

Exercício 10. *Sejam A e B pontos, e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Prove que, se $A + \vec{u} = B + \vec{v}$, então $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \vec{v}$.*

Exercício 11. *Determine relação entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que, para um dado ponto A, $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A$.*

Proposição 13. *Seja $\vec{w}$ um vetor não nulo. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores paralelos a $\vec{w}$, então $\vec{u} + \vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$.*

Demonstração. Tomemos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores paralelos a $\vec{w}$. Se $\vec{u}$ é nulo ou $\vec{v}$ é nulo, naturalmente $\vec{u} + \vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$. Suponhamos que $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$. Fixemos um ponto A e sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. Como $\vec{u} /\!/ \vec{v}$, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas e coincidentes. Sendo assim, o vetor $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ é paralelo ao vetor $\vec{v}$ e em consequência ao vetor $\vec{w}$. □

Corolário 5. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores paralelos.*

(1) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido, então $\vec{u} + \vec{v}$ têm mesmo sentido que $\vec{u}$ (ou $\vec{v}$) e $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
(2) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários, então $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \big|\, \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \,\big|$. Ainda, $\vec{u} + \vec{v}$ tem mesmo sentido que aquele de maior norma entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Demonstração. Sejam A, ponto, e $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. Dado que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção, esses pontos estão alinhados.

(1) Suponhamos que $\vec{u}$ tem mesmo sentido que $\vec{v}$. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, o resultado vale. Estudemos o caso no qual $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$. Dado que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido, B está entre A e C. Sendo assim, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ tem mesmo sentido que $\vec{u}$ e que $\vec{v}$ e, além disso, sua norma, que é a distância de A até C, é a soma da distância de A até B com a distância de B até C. Ou seja, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

(2) Suponhamos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários. Portanto nenhum deles é nulo. Estudemos os casos:

(a) Tomemos o caso $\|\vec{u}\| \geq \|\vec{v}\|$. Daí $C = A$ ou C está entre A e B. Logo $\overrightarrow{AC}$ tem mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$, ou seja, $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u}$ têm mesmo sentido. Ainda $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| - \|\overrightarrow{BC}\|$ e $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \big|\, \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \,\big|$.
(b) Tomemos o caso $\|\vec{u}\| < \|\vec{v}\|$. Daí A está entre C e B. Logo $\overrightarrow{AC}$ tem mesmo sentido de $\overrightarrow{BC}$, ou seja, $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido. Ainda $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| - \|\overrightarrow{AB}\|$ e $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \big|\, \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \,\big|$.

□

Teorema 14. *Sejam $\vec{u}$, vetor, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.*

Demonstração. Se $\alpha\beta = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, o resultado vale. Suponhamos $\vec{u} = \vec{0}$ e $\alpha\beta \neq 0$. Imediatamente temos que $\alpha\vec{u}, \beta\vec{u}, (\alpha + \beta)\vec{u}$ e $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ têm mesma direção que $\vec{u}$ (pela proposição 13).

Estudemos os casos nos quais $\alpha\beta > 0$:

(1) Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, conclui-se que $\alpha + \beta > 0$ e $\vec{u}$, $\alpha\vec{u}, \beta\vec{u}$ e $(\alpha+\beta)\vec{u}$ têm todos mesma direção e mesmo sentido. Pelo corolário anterior, temos que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ tem mesmo sentido que $(\alpha+\beta)\vec{u}$. Como

$$\|(\alpha+\beta)\vec{u}\| = (\alpha+\beta)\,\|\vec{u}\| = \alpha\,\|\vec{u}\| + \beta\,\|\vec{u}\| = \|\alpha\vec{u}\| + \|\beta\vec{u}\| = \|\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}\| \ ,$$

conclui-se que $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.
(2) Se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$, conclui-se que $\alpha+\beta < 0$ e $\alpha\vec{u}, \beta\vec{u}$ e $(\alpha+\beta)\vec{u}$ têm sentidos contrários ao sentido de $\vec{u}$. Pelo corolário anterior, temos que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ tem mesmo sentido que $(\alpha+\beta)\vec{u}$. Como

$$\|(\alpha+\beta)\vec{u}\| = -(\alpha+\beta)\,\|\vec{u}\| = -\alpha\,\|\vec{u}\| - \beta\,\|\vec{u}\| = \|\alpha\vec{u}\| + \|\beta\vec{u}\| = \|\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}\| \ ,$$

conclui-se que $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.

Suponhamos $\alpha\beta < 0$. Nesse caso, observamos que $|\alpha+\beta| = \big||\alpha| - |\beta|\big|$ e que

$$\|(\alpha+\beta)\vec{u}\| = |\alpha+\beta|\,\|\vec{u}\| = \big||\alpha| - |\beta|\big|\,\|\vec{u}\| = \Big||\alpha|\,\|\vec{u}\| - |\beta|\,\|\vec{u}\|\Big| = \big|\,\|\alpha\vec{u}\| - \|\beta\vec{u}\|\,\big| = \|\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}\| \ ,$$

pelo corolário anterior e pois que $\alpha\vec{u}$ e $\beta\vec{v}$ têm sentidos contrários. Sem perda de generalidade, vamos que $\alpha > 0 > \beta$ e estudaremos os casos possíveis:

(1) Se $\|\alpha\vec{u}\| > \|\beta\vec{u}\|$, então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}, \alpha\vec{u}$ e $\vec{u}$ têm mesmo sentido, pelo corolário anterior. Dado que $\alpha\,\|\vec{u}\| = \|\alpha\vec{u}\| > \|\beta\vec{u}\| = -\beta\,\|\vec{u}\|$, têm-se que $\alpha+\beta > 0$ e $(\alpha+\beta)\vec{u}$ tem mesmo sentido que $\vec{u}$. Sendo assim, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ e $(\alpha+\beta)\vec{u}$ têm mesmo sentido.
(2) Se $\|\alpha\vec{u}\| < \|\beta\vec{u}\|$, então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ tem mesmo sentido que $\beta\vec{u}$, pelo corolário anterior. Dado que $\alpha\,\|\vec{u}\| = \|\alpha\vec{u}\| < \|\beta\vec{u}\| = -\beta\,\|\vec{u}\|$, têm-se que $\alpha+\beta < 0$ e $(\alpha+\beta)\vec{u}$ tem sentido contrário ao de $\vec{u}$. Logo $(\alpha+\beta)\vec{u}$ tem mesmo sentido que $\beta\vec{u}$. Consequentemente, $\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ e $(\alpha+\beta)\vec{u}$ têm mesmo sentido.
(3) Se $\|\alpha\vec{u}\| = \|\beta\vec{u}\|$, então $\alpha\,\|\vec{u}\| = \|\alpha\vec{u}\| = \|\beta\vec{u}\| = -\beta\,\|\vec{u}\|$ e $\alpha+\beta = 0$. Logo $\alpha\vec{u} = -\beta\vec{u}$ e $(\alpha+\beta)\vec{u} = \vec{0} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.

Em qualquer dos casos possíveis, $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$. □

Definição 18. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Definimos a* ***diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$*** *por $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.*

Exercício 12. *Mostre que, para os vetores $\vec{x}, \vec{u}$ e $\vec{v}$, têm-se $\vec{x} + \vec{v} = \vec{u}$ se, e somente se, $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v}$.*

Exercício 13. *Mostre, para os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos que $-(\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v}$.*

Proposição 15 (Lei do Cancelamento)**.** *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores. Se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, então $\vec{v} = \vec{w}$.*

Demonstração. Se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, então

$$\vec{v} = \vec{0} + \vec{v} = (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{v} = -\vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} + (\vec{u} + \vec{w}) = (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{0} + \vec{w} = \vec{w}.$$

□

E finalmente relacionamos a soma de vetores com a multiplicação por escalar.

Teorema 16. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.*

Demonstração. Se $\vec{u} /\!/ \vec{v}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Daí, pelo teorema 14,

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha(\lambda\vec{v} + \vec{v}) = \alpha\big((\lambda+1)\vec{v}\big) = \big(\alpha(\lambda+1)\big)\vec{v} = (\alpha\lambda + \alpha)\vec{v} = \alpha(\lambda\vec{v}) + \alpha\vec{v} = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \ .$$

Se $\alpha = 0$, também validamos a tese do teorema. Seguimos, então, supondo que $\alpha \neq 0$ e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos. Consequentemente, $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$.

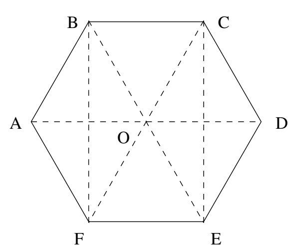
Tomemos o caso $\alpha > 0$ e sejam A, ponto, $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. Logo A, B e C formam um triângulo. Sejam $D = A + \alpha\overrightarrow{AB}$ e $E = A + \alpha\overrightarrow{AC}$. Como $\alpha > 0$, temos que D está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e do mesmo lado que B com relação ao ponto A. Pelo mesmo argumento, E está na reta $\overleftrightarrow{AC}$ e do mesmo lado que C com relação ao ponto A. Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são semelhantes por causa dos ângulos coincidentes $C\hat{A}B$ e $E\hat{A}D$ e posto que o lado $\overline{AC}$ está para o lado $\overline{AE}$ na mesma razão (a saber α) que o lado $\overline{AB}$ está para o lado $\overline{AD}$. Sendo assim, o segmento orientado (B, C) é paralelo e tem mesmo sentido que o segmento orientado (D, E). Devido à semelhança entre os triângulos citados, temos que $\overrightarrow{DE} = \alpha\overrightarrow{BC}$. Sendo assim,

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{BC} = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \ .$$

Agora suponhamos $\alpha < 0$. Pelo visto no parágrafo anterior, temos que
$$(-\alpha)(\vec{u} + \vec{v}) = (-\alpha)\vec{u} + (-\alpha)\vec{v} \ .$$
Uma vez que $(-\alpha)\vec{u} + (-\alpha)\vec{v} = -\alpha\vec{u} - \alpha\vec{v} = -(\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v})$, pelo exercício 13,
$$\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} = -\big((-\alpha)(\vec{u} + \vec{v})\big) = \alpha(\vec{u} + \vec{v}) \ .$$
□

Exercício 14. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ vetores e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Prove que:*
(1) $\lambda(\vec{u} - \vec{v}) = \lambda\vec{u} - \lambda\vec{v}$. *(2)* $(\lambda - \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} - \mu\vec{u}$.

Exercício 15. *Para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores e $b, c \in \mathbb{R}$ tais que $b \neq 0$ e $c \neq 0$, prove que:*
(1) $\frac{\vec{u}+\vec{v}}{b} = \frac{\vec{u}}{b} + \frac{\vec{v}}{b}$ *(2)* $\frac{\vec{u}-\vec{v}}{b} = \frac{\vec{u}}{b} - \frac{\vec{v}}{b}$ *(3)* $\frac{\vec{v}}{b} + \frac{\vec{u}}{c} = \frac{c\vec{v}+b\vec{u}}{bc}$ *(4)* $\frac{\vec{v}}{b} - \frac{\vec{u}}{c} = \frac{c\vec{v}-b\vec{u}}{bc}$

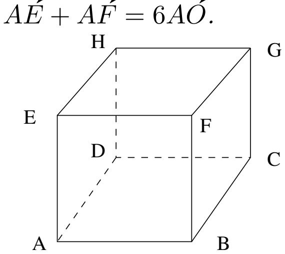


Para as próximas duas questões, $ABCDEF$ é um hexágono regular de centro O (como o da figura ao lado).

Exercício 16. *Determine o que se pede:*
(1) $A + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DO}$
(2) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$
(3) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{CD}$
(4) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DO}$
(5) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$

Exercício 17. *Prove que* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.

Exercício 18. *Para o cubo da figura ao lado, determine o que se pede:*
(1) $A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
(2) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}$
(3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{BF}$
(4) $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BH}$



Exercício 19. *Num triângulo $\triangle ABC$, sejam M, N, P os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente. Mostre que* $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

Exercício 20. *Sejam A, B e C três pontos quaisquer, com $A \neq B$. Prove que:*
X é um ponto do segmento $AB \iff \overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, com $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$.

Exercício 21. *Sejam A e B pontos distintos, e tome o ponto C na reta $\overleftrightarrow{AB}$ de tal forma que $\frac{\overrightarrow{AC}}{r} = \frac{\overrightarrow{CB}}{s}$, para $r, s \in \mathbb{R}$, não-nulos. Escreva $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$ em função de $\overrightarrow{AB}$, r e s.*

Exercício 22. *Um triângulo tem vértices A, B e C. Prove que X é um* ***ponto interior ao*** ΔABC *se, e somente se, existem reais α e β, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, tais que $\alpha + \beta < 1$ e $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$.* (**Lembrete:** *Um ponto é dito interior a uma triângulo se, e somente se, é interior a uma segmento que tem uma extremidade em um vértice e a outra extremidade interior ao lado oposto.)*

Exercício 23. *Prove que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.*

Exercício 24. *Prove que o segmento de reta, determinado pelos pontos médios de dois lados de um triângulo, é paralelo ao terceiro lado do triângulo e tem metade da medida deste.*

Exercício 25. *Um trapézio é um quadrilátero que tem dois,* ***e somente dois****, lados paralelos. Os lados paralelos de um trapézio são chamados de bases. Prove que o segmento de reta de extremidades nos pontos médios dos lados não-paralelos de uma trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a média (aritmética) das medidas das bases.*

VETORES DE UM PLANO

MARCELO DIAS PASSOS

Resumo. Estas notas foram digitadas durante os cursos de MATB34 (Geometria Analítica e Álgebra Vetorial) em 2021 (semestres 2021.1 e 2021.2).

Tomemos um vetor não-nulo $\vec{u}$. Já obervamos que os múltiplos de $\vec{u}$ são exatamente os vetores paralelos a $\vec{u}$. Se $\vec{v}$ também é não-nulo e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, qual a "posição relativa" de $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$? Se $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha + \beta\lambda)\vec{u}$, que é paralelo a $\vec{u}$. Portanto, se $\vec{v} /\!/ \vec{u}$, conclui-se que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ será paralelo a $\vec{u}$.

Sejam então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\vec{u} \not/\!/ \vec{v}$. Como convencionamos que o vetor nulo é paralelo a todo e qualquer vetor, imediatamente temos que $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$. Fixemos O, um ponto arbitrário, e sejam $A = O + \vec{u}$ e $B = O + \vec{v}$. Dado que $\vec{u} \not/\!/ \vec{v}$, O, A e B não estão alinhados e determinam um único plano que chamaremos de π. Portanto, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$O + \alpha\vec{u} \in \overleftrightarrow{OA} \subseteq \pi, \quad O + \beta\vec{v} \in \overleftrightarrow{OB} \subseteq \pi \quad \text{e também} \quad P = O + (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \in \pi.$$

Portanto $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, ou seja, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ admite um representante que tem origem e extremidade em π.

A discussão acima inspira as próximas definições:

Definição 1. *Sejam $\vec{u}$ um vetor, r uma reta e π um plano. Diremos que:*

(1) $\vec{v} /\!/ r$ se, e somente se, existem $A, B \in r$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, e
(2) $\vec{v} /\!/ \pi$, se e somente se, existem $C, D \in \pi$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$.

Teorema 1. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\vec{u} \not/\!/ \vec{v}$.*

(1) Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\alpha = 0 = \beta$,
(2) Para $\gamma, \delta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\gamma\vec{u} + \delta\vec{v} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ se, e somente se, $\gamma = \lambda$ e $\delta = \mu$, e
(3) Seja π um plano tal que $\vec{u} /\!/ \pi$ e $\vec{v} /\!/ \pi$. Para $\vec{w}$, vetor

$$\vec{w} /\!/ \pi \text{ se, e somente se, } \vec{w} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v} \text{ para únicos } \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. (1) Suponhamos que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $\alpha\vec{u} = -\beta\vec{v}$. Se $\alpha \neq 0$, também $\beta \neq 0$. Logo $\vec{u}, \alpha\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção, o que é uma contradição pois $\vec{u} \not/\!/ \vec{v}$. Portanto $\alpha = 0 = \beta$. A recíproca é imediata!
(2) Suponhamos que $\gamma\vec{u} + \delta\vec{v} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, $\gamma, \delta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Logo

$$\vec{0} = \big(\gamma\vec{u} + \delta\vec{v}\big) - \big(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\big) = (\gamma - \lambda)\vec{u} + (\delta - \mu)\vec{v}.$$

Pelo item anterior, $\gamma - \lambda = 0 = \delta - \mu$, ou seja, $\gamma = \lambda$ e $\delta = \mu$.
(3) Fixemos $O, P \in \pi$ tais que $\vec{w} = \overrightarrow{OP}$. Sejam $A = O + \vec{u}$ e $B = O + \vec{v}$. Pelo ponto P tracemos a reta t, que é paralela à reta $\overleftrightarrow{OA}$. Como t é paralela a $\overleftrightarrow{OA}$, então $\overleftrightarrow{OB} \not/\!/ \overleftrightarrow{OA}$ e consequentemente t encontra $\overleftrightarrow{OB}$, digamos no ponto Q. Sendo assim, $\overrightarrow{OQ} = \delta\vec{v}$, para algum $\delta \in \mathbb{R}$, e $\overrightarrow{QP} = \gamma\vec{u}$, para algum $\gamma \in \mathbb{R}$. Sendo assim,

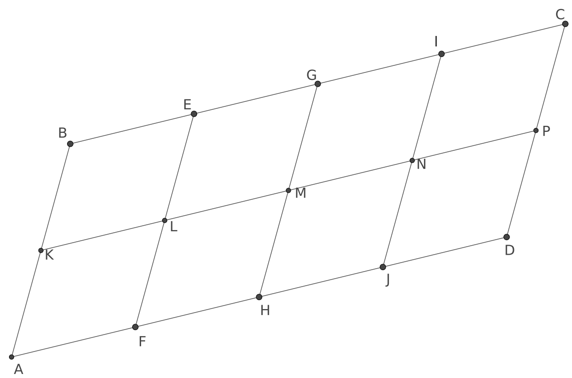
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v}.$$

□

Definição 2. *Sejam π um plano e $\mathbb{V}^2$ o conjunto dos vetores paralelos a π. Uma dupla $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ é chamada de* ***base para*** *$\mathbb{V}^2$ se, e somente se, $\vec{e_1}, \vec{e_2} \in \mathbb{V}^2$ e $\vec{e_1} \not/\!/ \vec{e_2}$.*

Dado $\vec{u} \in \mathbb{V}^2$, a dupla $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ é chamada de ***dupla de coordenadas do vetor $\vec{u}$ com relação à base*** *$(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. Se $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$, escreveremos $\vec{u} = (x, y)_{\mathcal{B}}$ para denotar a situação. O escalar x será chamado de* ***coordenada de $\vec{u}$ na direção*** *$\vec{e_1}$ enquanto y* ***é a coordenada de $\vec{u}$ na direção*** *$\vec{e_2}$.*

Date: 2021.



Exercício 1. *Determine as coordenadas dos vetores abaixo com relação à base* $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right)$.

(1) $\overrightarrow{0}$	*(8)* $\overrightarrow{NC}$	*(15)* $\overrightarrow{MB}$	*(22)* $\overrightarrow{MI}$
(2) $\overrightarrow{AF}$	*(9)* $\overrightarrow{LJ}$	*(16)* $\overrightarrow{MC}$	*(23)* $\overrightarrow{MJ}$
(3) $\overrightarrow{AB}$	*(10)* $\overrightarrow{EH}$	*(17)* $\overrightarrow{MD}$	*(24)* $\overrightarrow{MK}$
(4) $\overrightarrow{AC}$	*(11)* $\overrightarrow{EP}$	*(18)* $\overrightarrow{ME}$	*(25)* $\overrightarrow{ML}$
(5) $\overrightarrow{AK}$	*(12)* $\overrightarrow{EN}$	*(19)* $\overrightarrow{MF}$	*(26)* $\overrightarrow{MM}$
(6) $\overrightarrow{HF}$	*(13)* $\overrightarrow{JE}$	*(20)* $\overrightarrow{MG}$	*(27)* $\overrightarrow{MN}$
(7) $\overrightarrow{DH}$	*(14)* $\overrightarrow{MA}$	*(21)* $\overrightarrow{MH}$	*(28)* $\overrightarrow{MP}$

Exercício 2. *As coordenadas dos vetores abaixo são em relação à mesma base $\mathcal{B}$ da questão anterior. Apresente os vetores apenas usando os pontos da figura.*

(1) $(1,1)$	*(3)* $(1,-1)$	*(5)* $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$	*(7)* $(-2,1)$	*(9)* $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$	*(11)* $(4,1)$
(2) $(-1,1)$	*(4)* $\left(0,\frac{1}{2}\right)$	*(6)* $(2,-1)$	*(8)* $(-2,0)$	*(10)* $\left(4,\frac{1}{2}\right)$	*(12)* $\left(-4,\frac{1}{2}\right)$

Teorema 2. *Seja $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ uma base para $\mathbb{V}^2$. Se $\overrightarrow{u} = (a,b)_{\mathcal{B}}$, $\overrightarrow{v} = (x,y)_{\mathcal{B}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então*

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a+x, b+y)_{\mathcal{B}} \qquad e \qquad \lambda\overrightarrow{u} = (\lambda a, \lambda b)_{\mathcal{B}}.$$

Demonstração. Suponhamos que $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$. Portanto:

(1) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}\right) + \left(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}\right) = (a+x)\overrightarrow{e_1} + (b+y)\overrightarrow{e_2}$, enquanto

(2) $\lambda\overrightarrow{u} = \lambda(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}) = (\lambda a)\overrightarrow{e_1} + (\lambda b)\overrightarrow{e_2}$. □

Exercício 3. *Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (-3,4)$ e $\overrightarrow{v} = (1,2)$, determinar:*

(1) $3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$ *(2)* $2\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{u}$ *(3)* $-3\overrightarrow{u}$ *(4)* $\frac{1}{5}\overrightarrow{u} + \frac{1}{4}\overrightarrow{v}$ *(5)* $\frac{-\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}}{2}$ *(6)* $\frac{3\overrightarrow{u}}{6}$

Exercício 4. *Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (2,-3)$ e $\overrightarrow{v} = (-1,4)$, determinar $3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$ e $3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$.*

Exercício 5. *Determinar o vetor $\overrightarrow{x}$ na igualdade de $\overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{2} - \overrightarrow{x}$, dados $\overrightarrow{u} = (3,-1)$ e $\overrightarrow{v} = (-2,4)$.*

Exercício 6. *Encontrar os números $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$, onde $\overrightarrow{a} = (10,2)$, $\overrightarrow{b} = (-1,2)$ e $\overrightarrow{v} = (11,0)$.*

Proposição 3. *Nas mesmas condições do teorema anterior,*

$$\overrightarrow{u} /\!/ \overrightarrow{v} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 0\ .$$

Demonstração. Suponhamos que $\overrightarrow{u} /\!/ \overrightarrow{v}$ e, sem perda de generalidade, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Sendo assim, $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Pelo teorema anterior, conclui-se que $a = \alpha x$ e $b = \alpha y$. Logo

$$\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = ay - bx = (\alpha x)y - (\alpha y)x = 0\ .$$

Agora suponhamos que $ay = bx$. Se $x = 0 = y$, então $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ e portanto $\overrightarrow{u} /\!/ \overrightarrow{v}$. Sem perda de generalidade, seja $x \neq 0$. Logo $b = \left(\frac{a}{x}\right) y$ e

$$\left(\frac{a}{x}\right)\overrightarrow{v} = \left(\frac{a}{x}\right)(x,y)_{\mathcal{B}} = \left(\frac{ax}{x}, \frac{ay}{x}\right)_{\mathcal{B}} = (a,b)_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{u}\ .$$

Sendo assim, $\overrightarrow{u} /\!/ \overrightarrow{v}$. □

Observação 1 (Baricentro de um triângulo)**.** *Seja ΔABC um triângulo e sejam M, N e P os pontos médios dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Sendo assim, os segmentos $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ são chamadas* ***medianas*** *de ΔABC. Uma vez que $\overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{AC}$, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ é uma base para os vetores paralelos ao plano determinado por A, B e C. Sendo assim:*

(1) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$,

(2) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \left(-1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$, *e*

(3) $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} - \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}, -1\right)_{\mathcal{B}}$.

Observamos que:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Portanto $\overrightarrow{AM} \not\parallel \overrightarrow{BN}$ *e a reta* $\overleftrightarrow{AM}$ *encontra* $\overleftrightarrow{BN}$ *em um ponto que chamaremos de* G*. Dado que* G *é ponto de* $\overleftrightarrow{AM}$*, concluímos que* $\overrightarrow{AG} // \overrightarrow{AM}$*. Suponhamos que* $\overrightarrow{AG} = (x, y)_{\mathcal{B}}$*. Pela proposição anterior,*

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & x \\ \frac{1}{2} & y \end{vmatrix} = \frac{y}{2} - \frac{x}{2} = \frac{y - x}{2}.$$

Portanto $x = y$*. Por outro lado,* $\overrightarrow{BG} // \overrightarrow{BN}$*. Uma vez que* $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = (-1, 0)_{\mathcal{B}} + (x, x)_{\mathcal{B}} = (x - 1, x)_{\mathcal{B}}$ *e*

$$0 = \begin{vmatrix} -1 & x - 1 \\ \frac{1}{2} & x \end{vmatrix} = -x - \frac{x - 1}{2} = \frac{1 - 3x}{2}.$$

Logo $x = \frac{1}{3}$ *e*

(1) $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$,

(2) $\overrightarrow{BG} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}} = \frac{2}{3}\left(-1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$, *e*

(3) $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG} = (0, -1)_{\mathcal{B}} + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)_{\mathcal{B}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}, -1\right)_{\mathcal{B}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.

Concluímos que G ***é ponto de encontro das três medianas e este ponto divide cada mediana na razão 2 para 1****.*

Agora veremos teorema que determina relação entre as coordenadas de um mesmo vetor com relação a duas bases de $\mathbb{V}^2$.

Definição 3. *Sejam* $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ *e* $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}\right)$ *bases para* $\mathbb{V}^2$*. Se* $\overrightarrow{f_1} = (a, b)_{\mathcal{B}}$ *e* $\overrightarrow{f_2} = (c, d)_{\mathcal{B}}$*, a matriz*

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

é chamada de ***matriz de mudança de base de*** $\mathcal{B}$ ***para*** $\mathcal{C}$*.*

Como base é sempre par de vetores não paralelos, vale o seguinte resultado:

Corolário 1. *Toda matriz de mudança de base é inversível.*

Demonstração. Uma matriz de mudança de base tem como colunas as coordenadas de vetores não paralelos. Pela proposição 3, essa matriz tem determinante não nulo e portanto será inversível. □

Teorema 4 (Mudança de base)**.** *Nas mesmas condições da definição, se* M *é a matriz de mudança de base de* $\mathcal{B}$ *para* $\mathcal{C}$*, então*

$$M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

para todo $\vec{v} = (x, y)_{\mathcal{B}} = (u, v)_{\mathcal{C}}$*.*

Demonstração. Fixemos $\vec{v} = (x, y)_{\mathcal{B}} = (u, v)_{\mathcal{C}}$. Temos que

$$\vec{v} = u\overrightarrow{f_1} + v\overrightarrow{f_2} = u(a, b)_{\mathcal{B}} + v(c, d)_{\mathcal{B}} = \left(au + cv, bu + dv\right)_{\mathcal{B}} .$$

Pela unicidade das coordenadas com relação à base $\mathcal{B}$, temos que $x = au + cv$ e $y = bu + dv$, ou seja,

$$M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + cv \\ bu + dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

□

Exercício 7. *Ache as coordenadas de* $\overrightarrow{HL}$ *e* $\overrightarrow{HN}$ *com relação à base* $\mathcal{B}$ *(do exercício 1) e mostre que* ***não*** *são paralelos. Determine as coordenadas dos vetores abaixo com relação à base* $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{HL}, \overrightarrow{HN}\right)$*.*

(1) $\vec{0}$ *(3)* $\overrightarrow{AB}$ *(5)* $\overrightarrow{AK}$ *(7)* $\overrightarrow{DH}$ *(9)* $\overrightarrow{LJ}$ *(11)* $\overrightarrow{EP}$ *(13)* $\overrightarrow{JE}$ *(15)* $\overrightarrow{MB}$ *(17)* $\overrightarrow{MD}$

(2) $\overrightarrow{AF}$ *(4)* $\overrightarrow{AC}$ *(6)* $\overrightarrow{HF}$ *(8)* $\overrightarrow{NC}$ *(10)* $\overrightarrow{EH}$ *(12)* $\overrightarrow{EN}$ *(14)* $\overrightarrow{MA}$ *(16)* $\overrightarrow{MC}$ *(18)* $\overrightarrow{ME}$

Exercício 8. *Sejam* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *bases de* $\mathbb{V}^2$*. Se* M *é a matriz de mudança de base de* $\mathcal{B}$ *para* $\mathcal{C}$*, mostre que* M^{-1} *é a matriz de mudança de base de* $\mathcal{C}$ *para* $\mathcal{B}$*.*

1. Ortogonalidade. Produto Escalar

Definição 4. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos. Chamaremos de* ***medida angular entre*** $\vec{u}$ ***e*** $\vec{v}$ *a medida do ângulo $A\widehat{O}B$, onde O é um ponto, $A = O + \vec{u}$ e $B = O + \vec{v}$. Denotaremos esse número por* $\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v})$.

Nas mesmas condições da definição, se P é um ponto, $Q = P + \vec{u}$ e $R = P + \vec{v}$, então o ângulo $Q\widehat{P}R$ é congruente ao $A\widehat{O}B$. Portanto o cálculo de $\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ não depende dos representantes de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$ usados. Ainda,

$$0 \leq \operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi.$$

Facilmente observa-se que $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$ se, e somente se, $\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ou $\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

Exercício 9. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos. Mostre que:*

(1) $\operatorname{ang}(-\vec{u}, \vec{v}) = \pi - \operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v})$, *e*
(2) se $\vec{u} // \vec{v}$, então:
  (a) $\vec{u}$ tem mesmo sentido que $\vec{v}$ se, e somente se, $\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, *e*
  (b) $\vec{u}$ tem sentido contrário ao de $\vec{v}$ se, e somente se, $\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

Exercício 10. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ambos não nulos. Escreva* $\operatorname{ang}(\alpha\vec{u}, \beta\vec{v})$ *em função de* $\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v})$, *$\alpha$ e β.*

Definição 5. *Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, diremos que $\vec{u}$* ***é ortogonal a*** *$\vec{v}$ se, e somente se, um deles é nulo ou ambos são não-nulos e* $\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$. *Denotaremos essa relação por " $\vec{u} \perp \vec{v}$ ".*

Exercício 11. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ambos não nulos. Mostre que $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\alpha\vec{u} \perp \beta\vec{v}$.*

Proposição 5. *Para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.*

Demonstração. Observamos que a equivalência é verdadeira para o caso em que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. Suponhamos $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$.

Tomemos um ponto A e sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. Sendo assim, $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$. Ainda temos um triângulo com vértices em A, B e C. Observamos que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ se, e somente se, ΔABC é triângulo retângulo com ângulo reto em $A\widehat{B}C$, ou seja, se, e somente se, $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$. Pelo exercício 11, sabe-se que $-\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} \perp \vec{v}$. □

Definição 6. *Diremos que uma base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ é* ***ortogonal*** *se, e somente se, $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$. A base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ será dita* ***ortonormal*** *se, e somente se, for ortogonal e $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$ forem unitários.*

Corolário 2. *Se $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ é uma base ortogonal, então $\left(\frac{\vec{e_1}}{\|\vec{e_1}\|}, \frac{\vec{e_2}}{\|\vec{e_2}\|}\right)$ é base ortonormal.* □

Teorema 6. *Seja $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ uma base ortonormal. Se $\vec{u} = (x, y)_{\mathcal{B}}$, então $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$. Como $x\vec{e_1} \perp y\vec{e_2}$, temos, pela proposição 5, que

$$\|\vec{u}\|^2 = \|x\vec{e_1}\|^2 + \|y\vec{e_2}\|^2.$$

Dado que $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$ são unitários, $\|x\vec{e_1}\|^2 = x^2$ e $\|y\vec{e_2}\|^2 = y^2$. Logo $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. □

Exercício 12. *Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (-3, 4)$, calcular:*

(1) $\|\vec{u}\|$ *(2)* $\|\vec{v}\|$ *(3)* $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ *(4)* $\|2\vec{u} - \vec{v}\|$

Exercício 13. *Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{u} = (a, -2)$ tenha módulo 4.*

Exercício 14. *Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{v} = \left(a, \frac{1}{2}\right)$ seja unitário (i.e., ter norma 1).*

Teorema 7. *Seja $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ uma base ortonormal. Se $\vec{u} = (a, b)_{\mathcal{B}} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} = (x, y)_{\mathcal{B}} \neq \vec{0}$, então*

$$\cos\left(\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v})\right) = \frac{ax + by}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Demonstração. Seja $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$.

Suponhamos que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Como $a = \lambda x$ e $b = \lambda y$, induzimos que:

$$\frac{ax+by}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{(\lambda x)x + (\lambda y)y}{|\lambda| \cdot \|\vec{v}\|^2} = \frac{\lambda(x^2+y^2)}{|\lambda| \cdot \|\vec{v}\|^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|}.$$

Se $\lambda > 0$, então $\theta = 0$ e $\frac{ax+by}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = 1 = \cos 0$. Caso $\lambda < 0$, conclui-se que $\theta = \pi$ e $\frac{ax+by}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = -1 = \cos\pi$. Portanto o corolário é válido quando $\vec{u} // \vec{v}$.

Suponhamos que $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ e sejam A um ponto, $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$. Fica determinado o triângulo ΔABC e o lado $\overline{BC}$ é oposto ao ângulo $B\widehat{A}C$. Pela **Lei dos Cossenos**,

$$\|\overline{BC}\|^2 = \|\overline{AC}\|^2 + \|\overline{AB}\|^2 - 2 \cdot \|\overline{AC}\| \cdot \|\overline{AB}\| \cdot \cos\theta\ .$$

Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = (x-a, y-b)_{\mathcal{B}}$, temos

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \left(x^2+y^2\right) + \left(a^2+b^2\right) - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta\ .$$

Ou seja,

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = ax + by\ ,$$

e conclui-se a tese. □

Observação 2. *A partir de agora, salvo disposição em contrário, todos os vetores estarão escritos com relação a uma base ortonormal pré-fixada. Sendo assim, deixaremos de fazer menção à base quando apresentarmos as coordenadas de qualquer vetor.*

Definição 7. *Sejam $\vec{u} = (a,b)$ e $\vec{v} = (x,y)$. O número " $ax+by$ " – denotado $\vec{u} \bullet \vec{v}$ – será o **produto escalar (ou produto interno) de $\vec{u}$ por $\vec{v}$**.*

Corolário 3. *Nas mesmas condições da definição, $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.*

Demonstração. Suponhamos $\vec{u} \perp \vec{v}$. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, concluímos que $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$. Se $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$, pelo teorema anterior,

$$0 = \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|},$$

ou seja, $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

Agora suponhamos $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$. Caso $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, naturalmente $\vec{u} \perp \vec{v}$. Se $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$, pelo teorema anterior,

$$\cos\left(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})\right) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = 0.$$

Dado que $0 \leq \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$, temos que $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$. □

Exercício 15. *Sejam O, A e B três pontos não-alinhados. Mostre que:*

*(1) o ângulo $A\hat{O}B$ é ângulo **agudo** se, e somente se, $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} > 0$.*
*(2) o ângulo $A\hat{O}B$ é ângulo **obtuso** se, e somente se, $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} < 0$.*

Pergunta-se: o que acontece se $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = 0$?

Exercício 16. *Determine $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ para os casos:*

(1) $\vec{u} = (1,0)$ e $\vec{v} = (1,1)$ (2) $\vec{u} = (1,0)$ e $\vec{v} = (-1,-1)$ (3) $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $\vec{v} = (-1,0)$

Exercício 17. *Determinar o valor de k para que os vetores $\vec{u} = (-2,3)$ e $\vec{v} = (k,-4)$ sejam:*

(1) paralelos (2) ortogonais

Exercício 18. *Sejam $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ e $\vec{v} = (1,k)$. Determinar o valor de k para que:*

(1) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam paralelos,
(2) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais, e
(3) a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja de $\frac{\pi}{6}$.

Exercício 19. *Determinar o valor de a para que seja de $\frac{\pi}{4}$ o ângulo entre $\vec{u} = (2,1)$ e $\vec{v} = (1,a)$.*

Exercício 20. *Determinar o valor de a para que seja de $\frac{3\pi}{4}$ o ângulo entre $\vec{u} = (2,1)$ e $\vec{v} = (1,a)$.*

Proposição 8. *Para $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, vetores, e $\alpha \in \mathbb{R}$,*

(1) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$,
(2) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$,
(3) $(\alpha \vec{u}) \bullet \vec{v} = \alpha(\vec{u} \bullet \vec{v})$,
(4) $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$,
(5) $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$ *se, e somente se* $\vec{u} = \vec{0}$; *e*
(6) *se* $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$, *então* $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\big(\mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v})\big)$. □

Demonstração. Suponhamos $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ e $\vec{w} = (e, f)$. Logo

(1) $\vec{u} \bullet \vec{v} = ac + bd = ca + db = \vec{v} \bullet \vec{u}$.
(2) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = (a + c)e + (b + d)f = (ae + bf) + (ce + df) = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$.
(3) $(\alpha \vec{u}) \bullet \vec{v} = (\alpha a, \alpha b) \bullet (c, d) = (\alpha a)c + (\alpha b)d = \alpha(ac + bd) = \alpha(\vec{u} \bullet \vec{v})$.
(4) $\vec{u} \bullet \vec{u} = a^2 + b^2 = \|\vec{u}\|^2$.
(5) $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
(6) Pelo teorema 7. □

Corolário 4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, $|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. E vale a igualdade se, e somente se, $\vec{u} // \vec{v}$.*

Demonstração. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, temos que $|\vec{u} \bullet \vec{v}| = 0 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ e ainda $\vec{u} // \vec{v}$. Suponhamos $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$.

Pelo último item da proposição anterior:

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \Big|\cos\big(\mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v})\big)\Big| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| .$$

Além do mais,

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \Big|\cos\big(\mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v})\big)\Big| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v}) \in \{0, \pi\} \ .$$

Portanto, vale a igualdade se, e somente se, $\vec{u} // \vec{v}$. □

Exercício 21. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores. Mostre que:*
(1) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,(\vec{u} \bullet \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$. (2) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Corolário 5 (Desigualdade Triangular)**.** *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, então $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.*

Demonstração. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, $\vec{u} \bullet \vec{v} \leq |\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. Pelo exercício anterior:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u} \bullet \vec{u} + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{v} \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = \big(\,\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\,\big)^2 \ .$$

Sendo assim, $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. □

Exercício 22. *Mostre que, para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, $\big|\,\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\,\big| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$.*

Exercício 23. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores ambos não nulos. Mostre que são equivalentes:*
(1) $\vec{u} // \vec{v}$ *e têm mesmo sentido,* (2) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ *e* (3) $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \big|\,\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\,\big|$
Apresente equivalências análogas a estas para o fato de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serem paralelos de sentidos contrátrios.

Exercício 24. *Para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, mostre as seguintes identidades*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\,\|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{v}\|^2 \qquad e \qquad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4(\vec{u} \bullet \vec{v}) \ .$$

Exercício 25. *Mostre que um paralelogramo $ABCD$ tem diagonais perpendiculares se, e somente se, é um **losango**.*

Exercício 26. *Sejam O, A e B três pontos não-alinhados, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{b} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Mostre que o vetor $\vec{b} \neq \vec{0}$ e que é paralelo à bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$.*

Proposição 9. *Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor. Para $\vec{v}$, vetor, $\vec{v} \perp \vec{u}$ se, e somente se, $\vec{v} // (-b, a)$.*

Demonstração. Se $\vec{v} = (x, y)$, então

$$\vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow ax + by = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -b \\ y & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} // (-b, a) \ .$$

□

Definição 8. *Para o vetor $\vec{u} = (a, b)$, definimos o vetor $\vec{u}^{\perp} = (-b, a)$.*

Proposição 10. *Para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, e $\alpha \in \mathbb{R}$:*

(1) $\left\| \vec{u}^{\perp} \right\| = \| \vec{u} \|$,

(2) $\left(\vec{u}^{\perp} \right)^{\perp} = -\vec{u}$,

(3) $(\vec{u} + \vec{v})^{\perp} = \vec{u}^{\perp} + \vec{v}^{\perp}$, *e*

(4) $(\alpha \vec{u})^{\perp} = \alpha \vec{u}^{\perp}$.

Demonstração. Suponhamos $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$. Logo:

(1) $\left\| \vec{u}^{\perp} \right\| = \|(-b, a)\| = \sqrt{b^2 + a^2} = \| \vec{u} \|$.

(2) $\left(\vec{u}^{\perp} \right)^{\perp} = (-b, a)^{\perp} = (-a, -b) = -\vec{u}$.

(3) $(\vec{u} + \vec{v})^{\perp} = (a + c, b + d)^{\perp} = (-b - d, a + c) = (-b, a) + (-d, c) = \vec{u}^{\perp} + \vec{v}^{\perp}$.

(4) $(\alpha \vec{u})^{\perp} = (\alpha a, \alpha b)^{\perp} = (-\alpha b, \alpha a) = \alpha(-b, a) = \alpha \vec{u}^{\perp}$. □

Corolário 6. *Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\left(\vec{u}, \vec{u}^{\perp} \right)$ é base ortogonal. Se ainda, $\vec{u}$ é unitário, $\left(\vec{u}, \vec{u}^{\perp} \right)$ é base ortonormal.* □

Exercício 27. *Se $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, mostre que $(a, b)^{\perp} \bullet (x, y) = \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix}$.*

Tomemos um vetor $\vec{v}$ não-nulo. Fixado um vetor $\vec{u}$, gostaríamos de escrever $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$, onde $\vec{u_1} // \vec{v}$ e $\vec{u_2} \perp \vec{v}$. Sendo assim, $\vec{u_1} = \lambda \vec{v}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\vec{u_2} = \vec{u} - \vec{u_1}$ e $\vec{u_2} \bullet \vec{v} = 0$, vale

$$0 = \vec{v} \bullet (\vec{u} - \lambda \vec{v}) = \vec{v} \bullet \vec{u} - \lambda \| \vec{v} \|^2 \ .$$

Ou seja, $\lambda = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\| \vec{v} \|^2}$. Sendo assim $\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\| \vec{v} \|^2} \right) \vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$ e $\vec{u} - \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\| \vec{v} \|^2} \right) \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{v}$.

Definição 9. *Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$. Dado o vetor $\vec{u}$, **a projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$** é o vetor $\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\| \vec{v} \|^2} \right) \vec{v}$, que será denotado por $\mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$.*

Proposição 11. *Sejam $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$, vetores, e $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $\vec{v} \neq \vec{0}$. Então:*

(1) $\mathrm{proj}_{\vec{v}} (\alpha \vec{u}) = \alpha \mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$,

(2) $\mathrm{proj}_{\vec{v}} (\vec{u} + \vec{w}) = \mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{u} + \mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$,

(3) se $\mu \neq 0$, então $\mathrm{proj}_{(\mu \vec{v})} \vec{u} = \mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$,

(4) $\mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{0}$ *se, e somente se, $\vec{u} \perp \vec{v}$, e*

(5) $\mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{u}$ *se, e somente se, $\vec{u} // \vec{v}$.*

Demonstração. (1) $\mathrm{proj}_{\vec{v}} (\alpha \vec{u}) = \left(\frac{(\alpha \vec{u}) \bullet \vec{v}}{\| \vec{v} \|^2} \right) \vec{v} = \left(\frac{\alpha (\vec{u} \bullet \vec{v})}{\| \vec{v} \|^2} \right) \vec{v} = \alpha \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\| \vec{v} \|^2} \right) \vec{v} = \alpha \mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$.

(2) $\mathrm{proj}_{\vec{v}} (\vec{u} + \vec{w}) = \left(\frac{(\vec{u} + \vec{w}) \bullet \vec{v}}{\| \vec{v} \|^2} \right) \vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{w} \bullet \vec{v}}{\| \vec{v} \|^2} \right) \vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\| \vec{v} \|^2} + \frac{\vec{w} \bullet \vec{v}}{\| \vec{v} \|^2} \right) \vec{v} = \mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{u} + \mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$.

(3) Suponhamos $\mu \neq 0$. Daí

$$\mathrm{proj}_{(\mu \vec{v})} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \bullet (\mu \vec{v})}{\| \mu \vec{v} \|^2} \right) (\mu \vec{v}) = \mu \left(\frac{\mu (\vec{u} \bullet \vec{v})}{\mu^2 \| \vec{v} \|^2} \right) \vec{v} = \left(\frac{\mu^2 (\vec{u} \bullet \vec{v})}{\mu^2 \| \vec{v} \|^2} \right) \vec{v} = \mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{u} \ .$$

(4) Como $\vec{v} \neq \vec{0}$,

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\| \vec{v} \|^2} \right) \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\| \vec{v} \|^2} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \ .$$

(5) Suponhamos $\mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{u}$. Dado que $\mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{u} // \vec{v}$, então $\vec{u} // \vec{v}$. Agora suponhamos $\vec{u} = \beta \vec{v}$, para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Daí, pelo item (1)

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \mathrm{proj}_{\vec{v}} (\beta \vec{v}) = \beta \mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{v} = \beta \left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{v}}{\| \vec{v} \|^2} \right) \vec{v} = \beta \vec{v} = \vec{u} \ .$$

□

Exercício 28. *Encontrar a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, para os casos:*

(1) $\vec{u} = (1,1)$ *e* $\vec{v} = (2,5)$ *(2)* $\vec{u} = (1,0)$ *e* $\vec{v} = (4,3)$ *(3)* $\vec{u} = (4,3)$ *e* $\vec{v} = (1,2)$

Exercício 29. *Sejam* $\vec{v}$ *e* $\vec{u}$ *vetores e suponhamos* $\vec{v} \neq \vec{0}$. *Mostre que* $\|\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\| = \frac{|\vec{u}\bullet\vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$. *Se* $\vec{u} \neq \vec{0}$, *mostre que ainda* $\|\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\| = \|\vec{u}\| \cdot \big|\cos\big(\mathrm{ang}(\vec{u},\vec{v})\big)\big|$.

Exercício 30. *Sejam* $\vec{u}$ *e* $\vec{v} \neq \vec{0}$, *vetores. Ache fórmula para* $\|\vec{u} - \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\|$ *em função de* $\|\vec{u}\|$ *e* $\mathrm{ang}(\vec{u},\vec{v})$. *Como ficaria em função de* $\|\vec{v}\|$ *e* $\vec{u}\bullet\vec{v}$*?*

Exercício 31. *Seja* ΔABC *um triângulo e suponha que* $\overrightarrow{AB} = (a,b)$ *e* $\overrightarrow{AC} = (x,y)$. *Determine fórmula para a área de* ΔABC.

Proposição 12. *Seja* $(\vec{u},\vec{v})$ *uma base ortogonal. Então* $\vec{w} = \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{w} + \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{w}$, *para todo vetor* $\vec{w}$.

Demonstração. Fixemos um vetor $\vec{w}$. Uma vez que $(\vec{u},\vec{v})$ é base, existem únicos $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, tais que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Como $\vec{u}\bullet\vec{v} = 0$,

$$\vec{w}\bullet\vec{v} = \big(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\big)\bullet\vec{v} = \beta\,\|\vec{v}\|^2 \ .$$

Sendo assim, $\beta = \frac{\vec{w}\bullet\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$ e $\beta\vec{v} = \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{w}$. Analogamente, $\alpha\vec{u} = \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{w}$ e concluímos a demonstração. □

Exercício 32. *Seja* $\vec{v}$ *um vetor não nulo. Mostre que* $\vec{u} = \frac{(\vec{u}\bullet\vec{v})\,\vec{v} + (\vec{u}\bullet\vec{v}^{\perp})\,\vec{v}^{\perp}}{\|\vec{v}\|^2}$, *para todo vetor* $\vec{u}$.

Exercício 33. *Seja* $(\vec{u},\vec{v})$ *uma base ortonormal. Mostre que,* $\vec{w} = (\vec{w}\bullet\vec{u})\vec{u} + (\vec{w}\bullet\vec{v})\vec{v}$, *para todo vetor* $\vec{w}$.

Exercício 34. *Seja* $\mathcal{B}$ *uma base de* $\mathbb{V}^2$ *que é ortonormal. Sejam* $\mathcal{C} = (\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2})$ *também uma base de* $\mathbb{V}^2$ *e* M *a matriz de mudança de base de* $\mathcal{B}$ *para* $\mathcal{C}$. *Descreva as entradas da matriz* M^tM.

Exercício 35. *Sejam* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *bases de* $\mathbb{V}^2$ *e seja* M *a matriz de mudança de base de* $\mathcal{B}$ *para* $\mathcal{C}$. *Suponha que* $\mathcal{B}$ *é ortonormal. Mostre que* $\mathcal{C}$ *é ortonormal se, e somente se,* $M^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 36. *Seja* $M \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *tal que* $M^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Mostre que existe* $\theta \in \big[0,2\pi\big[$ *tal que* $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *ou* $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. *Mostre ainda que* $MM^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

VETORES DO ESPAÇO

MARCELO DIAS PASSOS

Resumo. Estas notas foram digitadas durante os cursos de MATB34 (Geometria Analítica e Álgebra Vetorial) em 2021 (semestres 2021.1 e 2021.2).

Para dar coordenadas aos vetores paralelos a determinado plano, precisamos tomar uma dupla de vetores paralelos a ele, que não fossem paralelos entre si. Para os demais vetores, ou seja, para todos os vetores do espaço precisamos de mais condições.

Definição 1. *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$, vetores distintos 2 a 2. Diremos que $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$* ***são coplanares*** *se, e somente se, existe plano π tal que $\overrightarrow{v_i} // \pi$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, ou seja, existir um plano ao qual todos os vetores citados são paralelos.*

Exercício 1. *Nas condições da definição mostre que, se $n \leq 2$, então $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ são coplanares.*

Teorema 1. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$* ***não*** *coplanares.*
(1) Para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ se, e somente se, $\alpha = 0 = \beta = \gamma$.
(2) Para $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}$ se, e somente se, $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$ e $\gamma = \nu$.
(3) Para $\vec{t}$, vetor, existem únicos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \ .$$

Demonstração. (1) Suponhamos que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$, para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, e que, sem perda de generalidade, que $\gamma \neq 0$. Sendo assim,

$$\vec{w} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{u} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{v} \ .$$

Por resultado anterior, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seriam coplanares, o que é um absurdo.
(2) Suponhamos que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}$, para $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Logo

$$\vec{0} = (\alpha - \lambda)\vec{u} + (\beta - \mu)\vec{v} + (\gamma - \nu)\vec{w} \ .$$

Pelo item anterior, $\alpha - \lambda = 0 = \beta - \mu = \gamma - \nu$, ou seja, $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$ e $\gamma = \nu$.
(3) Tomemos $\vec{w}$, um vetor. Fixemos O um ponto e sejam $P = O + \vec{t}$, $A = O + \vec{u}$, $B = O + \vec{v}$, $C = O + \vec{w}$ e π o plano determinado pelos pontos O, A e B. Pelo ponto P tracemos a reta r, que é paralela à reta $\overleftrightarrow{OC}$. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos ao plano π e, sendo assim, r não é paralela a π. Seja Q a interseção de r e π. Dado que $\overrightarrow{OQ} // \pi$, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{OQ} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Como $\overrightarrow{QP} // \vec{w}$, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{QP} = \gamma\vec{w}$. Logo

$$\vec{t} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \ .$$

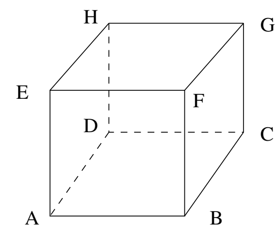
A unicidade dos coeficientes é dada pelo item anterior. □

Definição 2. *Seja $\mathbb{V}^3$ o conjunto de todos os vetores. Uma tripla $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ é chamada de* ***base para*** *$\mathbb{V}^3$ se, e somente se, $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ são distintos 2 a 2 e não coplanares.*

Dado $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$, a tripla $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ é chamada de ***tripla de coordenadas do vetor $\vec{u}$ com relação à base*** *$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Se $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, escreveremos $\vec{u} = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$ para denotar a situação. O escalar x será chamado de* ***coordenada de $\vec{u}$ na direção*** *$\overrightarrow{e_1}$ enquanto y* ***é a coordenada de $\vec{u}$ na direção*** *$\overrightarrow{e_2}$ e z* ***é a coordenada de $\vec{u}$ na direção*** *$\overrightarrow{e_3}$.*

Date: 2021.

Exercício 2. *Para o cubo da figura ao lado, considerando como base* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$*, determine as coordenadas dos vetores a seguir:*



(1) $\vec{0}$	*(5)* $\overrightarrow{AE}$	*(9)* $\overrightarrow{GH}$	*(13)* $\overrightarrow{GA}$
(2) $\overrightarrow{AB}$	*(6)* $\overrightarrow{CD}$	*(10)* $\overrightarrow{AH}$	*(14)* $\overrightarrow{EC}$
(3) $\overrightarrow{AC}$	*(7)* $\overrightarrow{AF}$	*(11)* $\overrightarrow{BH}$	*(15)* $\overrightarrow{HC}$
(4) $\overrightarrow{AD}$	*(8)* $\overrightarrow{DH}$	*(12)* $\overrightarrow{GE}$	

Teorema 2. *Seja* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ *uma base para* $\mathbb{V}^3$*. Se* $\vec{u} = (a,b,c)_{\mathcal{B}}$*,* $\vec{v} = (x,y,z)_{\mathcal{B}}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*, então*

$$\vec{u} + \vec{v} = (a+x, b+y, c+z)_{\mathcal{B}} \qquad e \qquad \lambda\vec{u} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)_{\mathcal{B}}.$$

Demonstração. Se $\vec{u} = (a,b,c)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{v} = (x,y,z)_{\mathcal{B}}$, então $\vec{u} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}$ e $\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$. Portanto:

(1) $\vec{u} + \vec{v} = (a+x)\vec{e_1} + (b+y)\vec{e_2} + (c+z)\vec{e_3}$, enquanto
(2) $\lambda\vec{u} = \lambda(a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}) = (\lambda a)\vec{e_1} + (\lambda b)\vec{e_2} + (\lambda c)\vec{e_3}$. □

Exercício 3. *Sendo* $\vec{u} = (1,-2,4)$*,* $\vec{v} = (0,2,5)$ *e* $\vec{w} = (1,1,-2)$*, ache as coordenadas de:*

(1) $\vec{u} + \vec{v}$ *(2)* $-\vec{u} + 2\vec{v}$ *(3)* $2\vec{v} + 3\vec{w}$ *(4)* $\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$ *(5)* $-\frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{4}\vec{u}$

Exercício 4. *Verifique se* $\vec{u}$ *pode ser escrito em função de* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$*, para* $\vec{u}$*,* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *do exercício anterior.*

Exercício 5. $(1,-1,3)$ *pode ser escrito em função de* $(-1,1,0)$ *e* $(2,3,\frac{1}{3})$*?*

Exercício 6. *Sejam* $OABC$ *um tetraedro, e* G *o baricentro (encontro das três medianas de uma triângulo) da face* $\triangle ABC$*. Explique por que* $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ *é uma base e ache as coordenadas de* $\overrightarrow{OG}$ *nesta base.*

Proposição 3. *Nas mesmas condições do teorema anterior,*

$$\vec{u} /\!/ \vec{v} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} b & y \\ c & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x \\ c & z \end{vmatrix} .$$

Demonstração. Suponhamos que $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ e, sem perda de generalidade, que $\vec{v} \neq \vec{0}$. Sendo assim, $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Pelo teorema anterior, $a = \alpha x$, $b = \alpha y$ e $c = \alpha z$. Logo

$$\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = ay - bx = (\alpha x)y - (\alpha y)x = 0 .$$

Analogamente concluímos que os outros dois determinantes serão nulos.

Agora suponhamos que $ay = bx$, $bz = cy$ e $az = cx$. Se $\vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u} /\!/ \vec{v}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x \neq 0$ e seja $\lambda = \frac{a}{x}$. Daí $a = \lambda x$, $b = \lambda y$, $c = \lambda z$ e, consequentemente, $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. □

Exercício 7. *Ache* m *para que* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *sejam paralelos:*

(1) $\vec{u} = (m,1,m)$ *e* $\vec{v} = (1,m,1)$ *(2)* $\vec{u} = (1-m^2, 1-m, 0)$ *e* $\vec{v} = (m,m,m)$

Observação 1. *Tomemos* $\vec{u} = (1,0,2)$ *e* $\vec{v} = (-1,0,2)$*. Observamos que* $\vec{u}$ *não é paralelo a* $\vec{v}$ *e que*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \textit{mas} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 .$$

Logo, o fato de dois dos três determinantes se anularem, não é condição suficiente para que os vetores sejam paralelos.

Teorema 4. *Seja* $\mathcal{B}$ *uma base para* $\mathbb{V}^3$*. Para* $\vec{u} = (a,b,c)_{\mathcal{B}}$*,* $\vec{v} = (x,y,z)_{\mathcal{B}}$ *e* $\vec{w} = (p,q,r)_{\mathcal{B}}$*,*

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \textit{ são coplanares se, e somente se,} \begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = 0 .$$

Demonstração. Seja $M = \begin{pmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{pmatrix}$

Suponhamos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são coplanares.

Caso $\vec{u} // \vec{v}$, pela proposição anterior, deduzimos que

$$\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} b & y \\ c & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x \\ c & z \end{vmatrix} \ .$$

Logo, os cofatores da terceira coluna de M são nulos. Desenvolvendo o determinante por esta coluna, obtemos que o determinante de M é nulo.

Se $\vec{u}$ não é paralelo a $\vec{v}$, então $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sendo assim, a terceira coluna de M é α vezes a primeira coluna de M mais β vezes a segunda coluna. Portanto M tem determinante zero.

Agora suponhamos que M tem determinante nulo. Se $\vec{v} // \vec{w}$, então $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são coplanares. Suponhamos que $\vec{v} \not\parallel \vec{w}$ e, sem perda de generalidade, que $\begin{vmatrix} x & p \\ y & q \end{vmatrix} \neq 0$. Se $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, então $\mathcal{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ é base para os vetores paralelos a um plano e $\big((x,y)_\mathcal{C}, (p,q)_\mathcal{C}\big)$ é base para esses mesmos vetores. Sendo assim, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $(a,b)_\mathcal{C} = \alpha(x,y)_\mathcal{C} + \beta(p,q)_\mathcal{C}$. Logo

$$0 = \begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - \alpha x - \beta p & x & p \\ b - \alpha y - \beta q & y & q \\ c - \alpha z - \beta r & z & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & p \\ 0 & y & q \\ c - \alpha z - \beta r & z & r \end{vmatrix} = (c - \alpha z - \beta r) \begin{vmatrix} x & p \\ y & q \end{vmatrix} \ .$$

Dado que $\begin{vmatrix} x & p \\ y & q \end{vmatrix} \neq 0$, $c - \alpha z - \beta r = 0$ ou, equivalentemente, $c = \alpha z + \beta r$. Logo $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são coplanares. □

Exercício 8. *Ache m, de modo que* $(1,2,2)$, $(m-1, 1, m-2)$ *e* $(m+1, m-1, 2)$ *sejam coplanares.*

Exercício 9. *Ache m, para que* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *sejam coplanares:*

(1) $\vec{u} = (m, 1, m+1)$, $\vec{v} = (1, 2, m)$ *e* $\vec{w} = (1,1,1)$
(2) $\vec{u} = (m, 1, m+1)$, $\vec{v} = (0, 1, m)$ *e* $\vec{w} = (0, m, 2m)$

Agora veremos teorema que determina relação entre as coordenadas de um mesmo vetor com relação a duas bases de $\mathbb{V}^3$.

Definição 3. *Sejam* $\mathcal{B} = \big(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\big)$ *e* $\mathcal{C} = \big(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\big)$ *bases para* $\mathbb{V}^2$. *Se* $\vec{f_1} = (a,b,c)_\mathcal{B}$, $\vec{f_2} = (x,y,z)_\mathcal{B}$ *e* $\vec{f_3} = (p,q,r)_\mathcal{B}$, *a matriz*

$$\begin{pmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{pmatrix}$$

é chamada de ***matriz de mudança de base de*** $\mathcal{B}$ ***para*** $\mathcal{C}$.

Como base é sempre trio de vetores não coplanares, vale o seguinte resultado:

Corolário 1. *Toda matriz de mudança de base é inversível.*

Demonstração. Uma matriz de mudança de base tem como colunas as coordenadas de vetores não coplanares. Pelo teorema 4, essa matriz tem determinante não nulo e portanto será inversível. □

Teorema 5 (Mudança de base)**.** *Nas mesmas condições da definição, se M é a matriz de mudança de base de* $\mathcal{B}$ *para* $\mathcal{C}$, *então*

$$M \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \ ,$$

para todo $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)_\mathcal{B} = (\lambda, \mu, \nu)_\mathcal{C}$.

Demonstração. Fixemos $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)_\mathcal{B} = (\lambda, \mu, \nu)_\mathcal{C}$. Logo

$$\vec{v} = \lambda\vec{f_1} + \mu\vec{f_2} + \nu\vec{f_3} = \lambda(a,b,c)_\mathcal{B} + \mu(x,y,z)_\mathcal{B} + \nu(p,q,r)_\mathcal{B} = \big(\lambda a + \mu x + \nu p, \lambda b + \mu y + \nu p, \lambda c + \mu z + \nu r\big)_\mathcal{B} \ .$$

Pela unicidade das coordenadas com relação à base $\mathcal{B}$, induzimos que $\alpha = \lambda a+\mu x+\nu p$, $\beta = \lambda b+\mu y+\nu p$ e $\gamma = \lambda c + \mu z + \nu r$, ou seja,

$$M \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu x + \nu p \\ \lambda b + \mu y + \nu p \\ \lambda c + \mu z + \nu r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} .$$

□

Exercício 10. *Sejam* $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ *base e* $\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2}$ *e* $\vec{f_3} = \vec{e_3}$, *decida se* $F = \left(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\right)$ *é base.*

Exercício 11. *Usando E e F do exercício anterior, ache as coordenadas em relação à base F de:*
(1) $(1, 1, 1)_E$ *(2)* $(1, -1, \frac{1}{2})_E$ *(3)* $(\alpha, \beta, \gamma)_E$ *(4)* $(2, 4, -4)_E$

Exercício 12. *Conforme o exercício 10, ache as coordenadas dos vetores abaixo em relação à base E:*
(1) $(0, 0, -1)_F$ *(2)* $(-1, 2, 0)_F$ *(3)* $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{2}{3})_F$

Exercício 13. *Mostre que* $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{AE}\right)$ *é base. Ache as coordenadas dos mesmos vetores do exercício 2 com relação à base* $\mathcal{C}$.

Exercício 14. *Sejam* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *bases de* $\mathbb{V}^3$. *Se M é a matriz de mudança de base de* $\mathcal{B}$ *para* $\mathcal{C}$, *mostre que* M^{-1} *é a matriz de mudança de base de* $\mathcal{C}$ *para* $\mathcal{B}$.

1. Ortogonalidade. Produto Escalar

Os conceitos de medida angular entre vetores não nulos e o de ortogonalidade continuam os mesmos que os de antes.

Definição 4. *Diremos que uma base* $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ *é* ***ortogonal*** *se, e somente se,* $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$, $\vec{e_2} \perp \vec{e_3}$ *e* $\vec{e_3} \perp \vec{e_1}$. *A base* $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ *será dita* ***ortonormal*** *se, e somente se, for ortogonal e* $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ *e* $\vec{e_3}$ *forem unitários.*

Corolário 2. *Se* $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ *é uma base ortogonal, então* $\left(\frac{\vec{e_1}}{\|\vec{e_1}\|}, \frac{\vec{e_2}}{\|\vec{e_2}\|}, \frac{\vec{e_3}}{\|\vec{e_3}\|}\right)$ *é base ortonormal.* □

Teorema 6. *Seja* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, *base ortonormal. Se* $\vec{u} = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$, *então* $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Demonstração. Sejam $\vec{w} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ e $\vec{v} = z\vec{e_3}$. Como $\vec{w} \perp \vec{v}$, por resultado anterior,

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{w} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{w}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 .$$

Por sua vez $\|\vec{w}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dado que $\|\vec{e_3}\| = 1$, induzimos que $\|\vec{v}\| = |z|$. Logo $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e segue a tese do teorema. □

Teorema 7. *Seja* $\mathcal{B}$ *uma base ortonormal. Se* $\vec{u} = (a, b, c)_{\mathcal{B}} \neq \vec{0}$ *e* $\vec{v} = (x, y, z)_{\mathcal{B}} \neq \vec{0}$, *então*

$$\cos\left(\mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v})\right) = \frac{ax + by + cz}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Demonstração. Seja $\theta = \mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v})$.

Se $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, então

$$\frac{ax + by + cz}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{(\lambda x)x + (\lambda y)y + (\lambda z)z}{|\lambda| \cdot \|\vec{v}\|^2} = \frac{\lambda(x^2 + y^2 + z^2)}{|\lambda| \cdot \|\vec{v}\|^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|}.$$

Caso $\lambda > 0$, conclui-se que $\theta = 0$ e $\frac{ax+by+cz}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = 1 = \cos 0$. Se $\lambda < 0$, então $\theta = \pi$ e $\frac{ax+by+cz}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = -1 = \cos\pi$. Portanto o corolário é válido quando $\vec{u} // \vec{v}$.

Suponhamos que $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ e sejam A um ponto, $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$. Fica determinado o triângulo ΔABC e o lado $\overline{BC}$ é oposto ao ângulo $B\widehat{A}C$. Pela **Lei dos Cossenos**,

$$\|\overline{BC}\|^2 = \|\overline{AC}\|^2 + \|\overline{AB}\|^2 - 2 \cdot \|\overline{AC}\| \cdot \|\overline{AB}\| \cdot \cos\theta .$$

Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = (x - a, y - b, z - c)_{\mathcal{B}}$, deduzimos que

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \left(a^2 + b^2 + c^2\right) - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta .$$

Ou seja,

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = ax + by + cz ,$$

e conclui-se a tese. □

Observação 2. *A partir de agora, salvo disposição em contrário, todos os vetores estão escritos com relação a uma base ortonormal pré-fixada. Sendo assim, deixaremos de fazer menção à base quanto no momento de apresentar as coordenadas de qualquer vetor.*

É muito comum na literatura usar $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ *para denotar uma base ortogonal.*

Definição 5. *Sejam* $\vec{u} = (a, b, c)$ *e* $\vec{v} = (x, y, z)$. *O número "* $ax + by + cz$ *" – denotado* $\vec{u} \bullet \vec{v}$ *– será o* ***produto escalar (ou produto interno) de*** $\vec{u}$ ***por*** $\vec{v}$.

Corolário 3. *Nas mesmas condições da definição,* $\vec{u} \perp \vec{v}$ *se, e somente se,* $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

Demonstração. A mesma usada para vetores paralelos a um plano. □

Exercício 15. *Determine* x *de modo que* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *sejam ortogonais.*

(1) $\vec{u} = (x, 0, 3)$ *e* $\vec{v} = (1, x, 3)$
(2) $\vec{u} = (x, x, 4)$ *e* $\vec{v} = (4, x, 1)$
(3) $\vec{u} = (x + 1, 1, 2)$ *e* $\vec{v} = (x - 1, -1, -2)$
(4) $\vec{u} = (x, -1, 4)$ *e* $\vec{v} = (x, -3, 1)$

Exercício 16. *Determine* $\vec{u}$ *ortogonal a* $(-3, 0, 1)$ *tal que* $\vec{u} \bullet (1, 4, 5) = 24$ *e* $\vec{u} \bullet (-1, 1, 0) = 1$.

Exercício 17. *Obtenha* $\vec{u}$ *ortogonal a* $(1, 1, 0)$ *tal que* $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ *e* $\operatorname{ang}\big(\vec{u}, (1, -1, 0)\big) = \frac{\pi}{4}$.

Proposição 8. *Para* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$, *vetores, e* $\alpha \in \mathbb{R}$,

(1) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$,
(2) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$,
(3) $(\alpha\vec{u}) \bullet \vec{v} = \alpha(\vec{u} \bullet \vec{v})$,
(4) $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$,
(5) $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$ *se, e somente se* $\vec{u} = \vec{0}$*; e*
(6) se $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$, *então* $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\big(\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v})\big)$.

Demonstração. Mesmos argumentos feitos para $\mathbb{V}^2$. □

Corolário 4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Se* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são vetores,* $|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. *E vale a igualdade se, e somente se,* $\vec{u} // \vec{v}$.

Demonstração. Mesmos argumentos feitos para $\mathbb{V}^2$. □

Exercício 18. *Sejam* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *vetores. Mostre que:*

(1) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,(\vec{u} \bullet \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$.
(2) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Corolário 5 (Desigualdade Triangular)**.** *Se* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são vetores, então* $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Demonstração. Mesmos argumentos feitos para $\mathbb{V}^2$. □

Exercício 19. *Mostre que, para* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *vetores,* $\big|\,\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\,\big| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Exercício 20. *Sejam* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *vetores ambos não nulos. Mostre que são equivalentes:*
(1) $\vec{u} // \vec{v}$ *e têm mesmo sentido,* *(2)* $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ *e* *(3)* $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \big|\,\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\,\big|$

Apresente equivalências análogas a estas para o fato de $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *serem paralelos de sentidos contrários.*

Exercício 21. *Para* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *vetores, mostre as seguintes identidades*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\,\|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{v}\|^2 \qquad e \qquad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4(\vec{u} \bullet \vec{v}).$$

Exercício 22. *Sendo* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *unitários,* $\|w\| = 4$, $\vec{u} \bullet \vec{w} = -2$, $\vec{v} \bullet \vec{w} = -4$ *e* $\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$, *calcule:*

(1) $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \bullet \vec{u}$
(2) $(5\vec{u} - \vec{w})\,(\vec{w} - 2\vec{u})$
(3) $(2\vec{w} - \vec{v} + \vec{u})\,(-\vec{u} + 2\vec{w} + \vec{v})$
(4) $(\vec{w} - \vec{v} + \vec{u}) \bullet (-\vec{u} + 2\vec{w} + \vec{v})$

Definição 6. *Seja* $\vec{v} \neq \vec{0}$. *Dado o vetor* $\vec{u}$, ***a projeção ortogonal de*** $\vec{u}$ ***sobre*** $\vec{v}$ *é o vetor* $\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v}$, *que será denotado por* $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$.

Proposição 9. *Sejam* $\vec{v}$, $\vec{u}$ *e* $\vec{w}$, *vetores, e* $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$. *Suponhamos que* $\vec{v} \neq \vec{0}$. *Então:*

(1) $\left(\vec{u} - \operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\right) \perp \vec{v}$,
(2) $\operatorname{proj}_{\vec{v}}(\alpha\vec{u}) = \alpha\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$,
(3) $\operatorname{proj}_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w}) = \operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} + \operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{w}$,

(4) *se* $\mu \neq 0$*, então* $\operatorname{proj}_{(\mu\vec{v})}\vec{u} = \operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$*,*
(5) $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{0}$ *se, e somente se,* $\vec{u} \perp \vec{v}$*, e*
(6) $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{u}$ *se, e somente se,* $\vec{u} /\!/ \vec{v}$*.*

Demonstração. Mesmos argumentos feitos para $\mathbb{V}^2$. □

Exercício 23. *Dada a base ortonormal* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$*, sejam* $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ *e* $\vec{v} = 3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}$*.*
(1) Obtenha a projeção ortogonal de $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u}$*.*
(2) Determine $\vec{p}$ *e* $\vec{q}$ *tais que* $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$*, sendo* $\vec{p}$ *paralelo a* $\vec{u}$ *e* $\vec{q}$ *ortogonal a* $\vec{u}$*.*

Exercício 24. *Calcule a projeção ortogonal de* $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u}$ *em cada caso.*
(1) $\vec{v} = (1,-1,2)$ *e* $\vec{u} = (3,-1,1)$
(2) $\vec{v} = (1,3,5)$ *e* $\vec{u} = (-3,1,0)$
(3) $\vec{v} = (-1,1,1)$ *e* $\vec{u} = (-2,1,2)$
(4) $\vec{v} = (1,2,4)$ *e* $\vec{u} = (-2,-4,-8)$

2. Produtos Misto e Vetorial

Definição 7. *Dados* $\vec{u} = (a,b,c)$*,* $\vec{v} = (x,y,z)$ *e* $\vec{w} = (p,q,r)$*, vetores.* ***O produto misto de*** $\vec{u}, \vec{v}$ ***e*** $\vec{w}$ ***(nesta ordem)*** *é o número*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} .$$

A ordem é dos vetores "dentro" dos colchetes é importante pois

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] .$$

Observamos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são coplanares se, e somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

Definição 8. *Dados* $\vec{u} = (a,b,c)$ *e* $\vec{v} = (x,y,z)$*, vetores.* ***O produto vetorial de*** $\vec{u}$ ***por*** $\vec{v}$ *é o vetor*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \right) .$$

Se $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *é a base (ortonormal), costuma-se abusar da linguagem de determinantes e escrever:*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} .$$

Imediatamente observamos que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\vec{u} /\!/ \vec{v}$.

Exercício 25. *Determine:*
(1) $(1,2,3) \wedge (3,1,2)$
(2) $(1,2,3) \wedge (2,4,6)$
(3) $(3,1,2) \wedge (2,4,6)$
(4) $(-1,1,2) \wedge (-1,1,2)$
(5) $(0,4,2) \wedge (1,3,2)$
(6) $(1,2,5) \wedge (2,0,-1)$
(7) $(6,-2,-4) \wedge (-1,-2,1)$
(8) $(7,0,-5) \wedge (1,2,-1)$
(9) $(1,-3,1) \wedge (1,1,4)$

Exercício 26. *Seja* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *uma base ortonormal de* $\mathbb{V}^3$*. Calcule:*
(1) $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$ *(2)* $\vec{\jmath} \wedge \vec{k}$ *(3)* $\vec{k} \wedge \vec{\imath}$ *(4)* $\vec{\imath} \wedge \vec{k}$ *(5)* $\vec{k} \wedge \vec{\jmath}$ *(6)* $\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath}$

Exercício 27. *Calcule* $\left(\sqrt{2}\,\vec{\imath} - \sqrt{3}\,\vec{\jmath} + \vec{k}\right) \wedge \left(-\sqrt{6}\,\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \sqrt{3}\,\vec{k}\right)$*.*

A próxima proposição vai justificar o nome "misto" ao "produto dos colchetes".

Proposição 10. *Se* $\vec{u}$*,* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *são vetores, então* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \bullet \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \bullet \vec{w}$*.*

Demonstração. Sejam $\vec{u} = (a,b,c)$, $\vec{v} = (x,y,z)$ e $\vec{w} = (p,q,r)$. Desenvolvendo o determinante $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ pelos cofatores da sua primeira linha,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} y & z \\ q & r \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} x & z \\ p & r \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ p & q \end{vmatrix} =$$
$$= (a,b,c) \bullet \left(\begin{vmatrix} y & z \\ q & r \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ r & p \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ p & q \end{vmatrix} \right) = \vec{u} \bullet \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) .$$

Desenvolvendo o mesmo determinante pelos cofatores da terceira linha obtemos que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w}$. $\square$

Corolário 6. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores. Então $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}]$. Ainda, $\vec{u} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$ e $\vec{v} \perp (\vec{u} \perp \vec{v})$.*

Demonstração. Uma vez que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v}) = [\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}] \ ,$$

pela proposição anterior.

Ainda, $\vec{u} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}] = 0 = [\vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = \vec{v} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})$. Sendo assim, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. $\square$

Proposição 11. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, vetores, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

(1) $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$
(2) $(\vec{u} + \vec{w}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{w} \wedge \vec{v}$
(3) $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v})$
(4) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Exercício 28. *Demonstre a proposição anterior.*

Exercício 29. *Para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, mostre que* $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge (\gamma\vec{u} + \delta\vec{v}) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Proposição 12. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$, vetores, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

(1) $[\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \lambda[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w}]$
(2) $[\vec{u} + \vec{t}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{t}, \vec{v}, \vec{w}]$
(3) $[\vec{u}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{t}, \vec{w}]$
(4) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{t}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}]$

Exercício 30. *Demonstre a proposição anterior.*

Exercício 31. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não paralelos. Seja $\vec{x}$ um vetor qualquer. Mostre que* $\operatorname{proj}_{\vec{u} \wedge \vec{v}} \vec{x} = \frac{[\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}]}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$. *Suponha que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ e $\vec{t} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v}$ são também não paralelos. Mostre que* $\operatorname{proj}_{\vec{u} \wedge \vec{v}} \vec{x} = \operatorname{proj}_{\vec{w} \wedge \vec{t}} \vec{x}$.

Teorema 13. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores* ***não paralelos****. Então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é base para $\mathbb{V}^3$ e, para $\vec{w} \in \mathbb{V}^3$,*

$$\vec{w} // (\vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ se, e somente se, } \vec{w} \perp \vec{u} \text{ e } \vec{w} \perp \vec{v}.$$

Demonstração. Dado que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é não nulo, conclui-se que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é base pelo corolário 6. Tomemos $\vec{w} \in \mathbb{V}^3$.

Suponhamos que $\vec{w}$ é paralelo a $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Dado que $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$. Como $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{u} = 0$, então $\vec{w} \bullet \vec{u} = 0$ e consequentemente $\vec{w} \perp \vec{u}$. Analogamente, $\vec{w} \perp \vec{v}$.

Agora suponhamos que $\vec{w} \perp \vec{u}$ e $\vec{w} \perp \vec{v}$. Dado que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é base, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma(\vec{u} \wedge \vec{v})$. Como $\vec{w} \perp \vec{u}$,

$$0 = \vec{w} \bullet \vec{u} = \big(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma(\vec{u} \wedge \vec{v})\big) \bullet \vec{u} = \alpha \|\vec{u}\|^2 + \beta(\vec{v} \bullet \vec{u}) \ .$$

Analogamente,

$$0 = \vec{w} \bullet \vec{v} = \big(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma(\vec{u} \wedge \vec{v})\big) \bullet \vec{v} = \alpha(\vec{u} \bullet \vec{v}) + \beta \|\vec{v}\|^2 \ .$$

Logo os números α e β resolvem o sistema linear

$$\begin{pmatrix} \|\vec{u}\|^2 & \vec{u} \bullet \vec{v} \\ \vec{u} \bullet \vec{v} & \|\vec{v}\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Mas a matriz $\begin{pmatrix} \|\vec{u}\|^2 & \vec{u} \bullet \vec{v} \\ \vec{u} \bullet \vec{v} & \|\vec{v}\|^2 \end{pmatrix}$ tem determinante $\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2 > 0$, pela **Desigualdade de Cauchy-Schwarz** e dado que $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$. Portanto $\alpha = \beta = 0$ e $\vec{w} // (\vec{u} \wedge \vec{v})$. $\square$

Corolário 7. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores ambos não nulos e tais que $\vec{u} \perp \vec{v}$. Para $\vec{w} \in \mathbb{V}^3$,*

$$\vec{w} \perp \vec{u} \text{ se, e somente se, existem } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tais que } \vec{w} = \alpha\vec{v} + \beta(\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

Exercício 32. *Demonstre o corolário anterior.*

Proposição 14. *Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$, então $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{w})\vec{u}$.*

Demonstração. Sejam $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (x, y, z)$ e $\vec{w} = (p, q, r)$. Logo

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge w = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \\ p & q & r \end{vmatrix} .$$

A coordenada de $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ na direção $\vec{\imath}$ é

$$r \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} rc & a \\ rz & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} qb & a \\ qy & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pa & a \\ px & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u} \bullet \vec{w} & a \\ \vec{v} \bullet \vec{w} & x \end{vmatrix} .$$

Analogamente concluímos que a coordenada de $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ na direção $\vec{\jmath}$ é $\begin{vmatrix} \vec{u} \bullet \vec{w} & b \\ \vec{v} \bullet \vec{w} & y \end{vmatrix}$; enquanto na direção $\vec{k}$ é $\begin{vmatrix} \vec{u} \bullet \vec{w} & c \\ \vec{v} \bullet \vec{w} & z \end{vmatrix}$. Portanto

$$\begin{aligned} (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge w &= \Big((\vec{u} \bullet \vec{w})x - (\vec{v} \bullet \vec{w})a, (\vec{u} \bullet \vec{w})y - (\vec{v} \bullet \vec{w})b, (\vec{u} \bullet \vec{w})z - (\vec{v} \bullet \vec{w})c\Big) = \\ &= \Big((\vec{u} \bullet \vec{w})x, (\vec{u} \bullet \vec{w})y, (\vec{u} \bullet \vec{w})z\Big) - \Big((\vec{v} \bullet \vec{w})a, (\vec{v} \bullet \vec{w})b, (\vec{v} \bullet \vec{w})c\Big) = \\ &= (\vec{u} \bullet \vec{w})\big(x, y, z\big) - (\vec{v} \bullet \vec{w})\big(a, b, c\big) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{w})\vec{u} . \end{aligned}$$

□

Exercício 33. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, vetores. Mostre que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w} + (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v}$.*

Exercício 34. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{t}$, vetores. Mostre que $\big(\vec{u} \wedge \vec{v}\big) \bullet \big(\vec{w} \wedge \vec{t}\big) = \begin{vmatrix} \vec{u} \bullet \vec{w} & \vec{u} \bullet \vec{t} \\ \vec{v} \bullet \vec{w} & \vec{v} \bullet \vec{t} \end{vmatrix}$.*

Teorema 15. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Então $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + \big(\vec{u} \bullet \vec{v}\big)^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$.*

Demonstração. Pelo exercício anterior,

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{u} \bullet \vec{u} & \vec{u} \bullet \vec{v} \\ \vec{v} \bullet \vec{u} & \vec{v} \bullet \vec{v} \end{vmatrix} = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2 .$$

□

Exercício 35. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. Mostre que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \operatorname{sen}\big(\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v})\big)$.*

Exercício 36. *Mostre que, para $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. Mostre que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ se, e somente se, $\vec{u} \perp \vec{v}$.*

Exercício 37. *Mostre que a área do triângulo $\triangle ABC$ é $\frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2}$.*

Exercício 38. *A medida angular entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é $\frac{\pi}{3}$, e suas normas são, respectivamente, 1 e 2. Sendo $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$, calcule a norma de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.*

Exercício 39. *O lado do quadrado $ABCD$ mede 2, AC é diagonal e M é ponto médio de BC. Calcule $\|\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DB}\|$.*

Exercício 40. *Os pontos A, B e C formam um triângulo, e P e Q são tais que $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$ e $3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$. Mostre que B, P e Q formam triângulo e calcule a razão entre as áreas de $\triangle BPQ$ e $\triangle ABC$.*

Exercício 41. *Resolva os sistemas:*

(1) $\begin{cases} \vec{x} \wedge (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} \\ \vec{x} \bullet (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = 2 \end{cases}$ *(2)* $\begin{cases} \vec{x} \bullet \Big(2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}\Big) = 9 \\ \vec{x} \wedge \Big(-\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}\Big) = -2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \end{cases}$

Exercício 42. *Determine $\vec{x}$ de norma $\sqrt{3}$, ortogonal a $(1, 1, 0)$ e a $(-1, 0, 1)$ e que forma ângulo agudo com $\vec{\jmath}$.*

Exercício 43. *A medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$, e o vetor $\vec{w}$, de norma 4, é ortogonal a ambos. Sabendo que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$, calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.*

Exercício 44. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, vetores.*
(1) Mostre que $\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|$.
(2) Mostre que $\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|$ *se, e somente se,* $\vec{0}\in\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ *ou* $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ *é base ortogonal.*

Exercício 45. *Para $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, vetores, $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$, mostre que*

$$(a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w})\wedge(x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}) = \begin{vmatrix} b & y \\ c & z\end{vmatrix}(\vec{v}\wedge\vec{w}) - \begin{vmatrix} a & x \\ c & z\end{vmatrix}(\vec{w}\wedge\vec{u}) + \begin{vmatrix} a & x \\ b & y\end{vmatrix}(\vec{u}\wedge\vec{v})\ .$$

Exercício 46. *Para $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{V}^3$ e $a,b,c,x,y,z,p,q,r\in\mathbb{R}$, mostre que*

$$\Big[a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}\ ,\ x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}\ ,\ p\vec{u}+q\vec{v}+r\vec{w}\Big] = \begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r\end{vmatrix}\cdot[\vec{u},\vec{v},\vec{w}].$$

Exercício 47. *Prove que* $[\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w}+\vec{u}] = 2[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

Exercício 48. *Sendo* $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=6$, *calcule* $[2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w},-\vec{u}+\vec{v}-\vec{w},\vec{v}-3\vec{w}]$.

Proposição 16. *O volume do tetraedro $ABCD$ é* $\frac{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right|}{6}$ *um tetraedro.*

Demonstração. Tomemos como base do tetraedro o triângulo $\triangle ABC$. Sendo assim, o vértice D vai determinar a altura do tetraedro. Seja $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

Pelo exercício 37, a área do triângulo $\triangle ABC$ é $S_{\triangle ABC}=\frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2}=\frac{\|\vec{n}\|}{2}$.

Uma vez que $\vec{n}$ é ortogonal à base do tetraedro, concluímos que sua altura h é o tamanho da projeção de $\overrightarrow{AD}$ sobre $\vec{n}$, ou seja, $h=\|\mathrm{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{AD}\| = \left|\frac{\overrightarrow{AD}\bullet\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right|$.

Portanto o volume do tetraedro é

$$\frac{S_{\triangle ABC}\cdot h}{3} = \frac{\frac{\|\vec{n}\|}{2}\cdot\left|\frac{\overrightarrow{AD}\bullet\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right|}{3} = \left|\frac{\overrightarrow{AD}\bullet(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})}{6}\right| = \frac{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right|}{6}\ .$$

□

Exercício 49. *Sejam $ABCD$ um tetraedro, $P=A+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$, $Q=B-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ e $R=C+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Mostre que $PQRD$ forma tetredro e determine a razão entre os volumes de $PQRD$ e $ABCD$.*

COORDENADAS AOS PONTOS DE UM PLANO. RETAS

MARCELO DIAS PASSOS

Resumo. Estas notas foram digitadas durante os cursos de MATB34 (Geometria Analítica e Álgebra Vetorial) em 2021 (semestres 2021.1 e 2021.2).

Depois de darmos coordenadas aos vetores de um plano, podemos fazê-lo para os pontos. Logo em seguida estamos aptos a dar equações às retas.

1. Coordenadas aos pontos de um plano

Definição 1. *Fixado um plano π, seja $\mathbb{V}^2$ o conjunto dos vetores paralelos a π. Diremos que $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ é um* ***sistema de coordendas para os pontos de*** *π se, e somente se, $O \in \pi$ e $\mathcal{B}$ é base para $\mathbb{V}^2$.*

O ponto O será chamado de ***origem*** *de Σ, enquando $\mathcal{B}$ de* ***base****. Por vezes escreveremos $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ no lugar de $\big(O, (\vec{e_1}, \vec{e_2})\big)$.*

Para cada $P \in \pi$, já que $\overrightarrow{OP} \in \mathbb{V}^2$, diremos que

$$P = (x, y)_\Sigma \text{ se, e somente se, } \overrightarrow{OP} = (x, y)_{\mathcal{B}}.$$

Neste caso, diremos que P ***tem coordenadas*** *(x, y)* ***com relação ao sistema*** *Σ. A primeira coordenada do par citado é chamado de* ***abscissa do ponto (ou de)*** *P e a segunda de* ***ordenada de*** *P. A reta que passa pela origem e é paralela ao primeiro vetor da base é chamado de* ***eixo das abscissas*** *e a reta que também passa pela origem e é paralela ao segundo vetor da base é chamada de* ***eixo das ordenadas****. Os dois eixos serão chamados de* ***eixos coordenados****.*

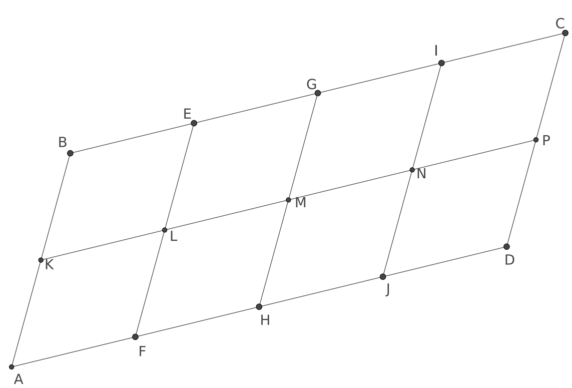
Se a base é ortonormal, diremos que o sistema é ***ortogonal****.*

Observamos que, se $\Sigma = (0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, para $P \in \pi$,

$$P = (x, y)_\Sigma \text{ se, e somente se, } P = O + x\vec{e_1} + y\vec{e_2}.$$

Naturalmente, $0 = (0, 0)_\Sigma$.

Visto que trabalharemos dentro do mesmo plano π, vamos parar de fazer menção a ele. Todos os objetos geométricos, aos quais faremos referência, estarão contidos em π.



Exercício 1. *Determine as coordenadas de* ***todos os pontos da figura ao lado*** *com relação ao sistema $\Sigma = \big(M, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MG}\big)$.*

Exercício 2. *Ainda usando a figura ao lado, determine os pontos de coordenadas dadas abaixo com relação ao sistema $\Gamma = \big(H, \overrightarrow{HL}, \overrightarrow{HN}\big)$.*

(1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	*(6)* $(-1, 1)$	*(11)* $(1, 1)$
(2) $(1, -1)$	*(7)* $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$	*(12)* $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
(3) $(0, 2)$	*(8)* $(2, 0)$	*(13)* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
(4) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$	*(9)* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$	*(14)* $(0, 1)$
(5) $(1, 0)$	*(10)* $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	*(15)* $(0, 0)$

Exercício 3. *Tomando os sistemas Σ e Γ das questões anteriores, se um ponto $X = (a, b)_\Sigma = (x, y)_\Gamma$, determine relação entre a, b, x e y. Procure apresentar essa relação de maneira matricial.*

Proposição 1. *Seja $\Sigma = (0, \mathcal{B})$ um sistema de coordenada do plano. Se $A = (a, b)_\Sigma$ e $B = (x, y)_\Sigma$, então $\overrightarrow{AB} = (x - a, y - b)_{\mathcal{B}}$.*

Date: 2021.

Demonstração. Dado que $\overrightarrow{OA} = (a,b)_{\mathcal{B}}$ e $\overrightarrow{OB} = (x,y)_{\mathcal{B}}$, então

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x-a, y-b)_{\mathcal{B}} \ .$$

□

Corolário 1. *Seja $\Sigma = (0,\mathcal{B})$ um sistema de coordenada do plano. Se $A = (a,b)_\Sigma$ e $\vec{v} = (p,q)_{\mathcal{B}}$, então $A + \vec{v} = (a+p, b+q)_\Sigma$.*

Demonstração. Seja $Q = A + \vec{v}$. Daí $Q = (x,y)_\Sigma$. Como $\overrightarrow{AQ} = \vec{v} = (x-a, y-b)_{\mathcal{B}}$, então $p = x-a$ e $q = y-b$. Ou seja, $Q = (a+p, b+q)_\Sigma$. □

Exercício 4. *Dados os pontos $A = (-2,3)$, $B = (1,4)$, $C = (1,2)$ e $D = (4,3)$, ache as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DA}$.*

Exercício 5. *Prove (vetorialmente!) que os pontos $A = (2,1)$, $B = (5,2)$, $C = (6,5)$ e $D = (3,4)$ são vértices de um paralelogramo.*

Exercício 6. *Sejam $A = (a,b)$ e $B = (x,y)$, pontos distintos. Determine fórmula para as coordenadas de M, o ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$.*

Exercício 7. *Defina "simetria em relação a um ponto". Sejam $C = (a,b)$ e $P = (\alpha,\beta)$, pontos. Determine as coordenadas do ponto Q, que é simétrico a P com relação a C.*

Exercício 8. *Determine fórmula para as coordenadas do baricentro de um triângulo, sabendo-se as coordenadas dos seus vértices.*

Exercício 9. *O baricentro de um triângulo ABC é $G = (1,6)$ e dois dos seus vértices são $A = (2,5)$ e $B = (4,7)$. Determine seu terceiro vértice.*

Exercício 10. *Sendo $A = (-2,3)$ e $B = (6,-3)$, extremidades de um segmento, determinar:*

(1) os pontos C, D e E que dividem o segmento $\overline{AB}$ em quatro partes de mesmo comprimento;
(2) os pontos F e G que dividem o segmento $\overline{AB}$ em três partes de mesmo comprimento.

Exercício 11. *Dados os pontos $A = (3,-4)$ e $B = (-1,1)$, além do vetor $\vec{v} = (-2,3)$, calcular:*

(1) $\overrightarrow{AB} + \vec{v}$ *(2)* $\overrightarrow{BA} - \vec{v}$ *(3)* $B + 2\overrightarrow{AB}$ *(4)* $3\vec{v} - 2\overrightarrow{BA}$

Exercício 12. *Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo $ABCD$, para:*

(1) $A = (-3,-1)$, $B = (4,2)$ *e* $C = (5,5)$ *(2)* $A = (5,1)$, $B = (7,3)$ *e* $C = (3,4)$

Proposição 2. *Sejam $A = (x_1,y_1)$, $B = (x_2,y_2)$ e $C = (x_3,y_3)$. Então A, B e C estão alinhados se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstração. Observamos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$$

se, e somente se, A, B e C estão alinhados. □

Proposição 3. *Seja Σ um sistema de coordenada ortogonal. Se $A = (a,b)_\Sigma$ e $B = (x,y)_\Sigma$, então $d(A,B) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.*

Demonstração. É imediato do fato que a base é ortonormal e que $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(x-a, y-b)$ com relação a ela. □

Exercício 13. *Determinar a distância entre os pontos $A = (1,3)$ e $B = (-1,4)$.*

Exercício 14. *Classifique os triângulos abaixo (**eqüilátero**, **isósceles** ou **escaleno**):*

(1) $A = (1,1)$, $B = (3,2)$ *e* $C = (0,3)$
(2) $D = (-1,1)$, $E = (3,1)$ *e* $F = (1, 2\sqrt{3}+1)$
(3) $G = (3, 2\sqrt{3})$, $H = (3,0)$ *e* $I = (0, -\sqrt{3})$

Exercício 15. *Encontrar P, ponto do eixo Ox, tal que a sua distância ao ponto $A = (2, -3)$ é 5.*

Exercício 16. *Provar que os pontos $A = (-2, -1)$, $B = (2, 2)$, $C = (-1, 6)$ e $D = (-5, 3)$, nesta ordem, são vértices de um quadrado.*

Exercício 17. *Chamamos de **trapézio** um quadrilátero que tem dois, **e somente dois**, lados paralelos. Um trapézio é chamado de **reto** se tem um ângulo reto. Mostre que $ABCD$ é um trapézio reto, onde $A = (6, 5)$, $B = (11, 5)$, $C = (3, 1)$ e $D = (2, 3)$, num sistema ortonormal.*

Exercício 18. *Determine os ângulos internos dos triângulos da questão 14.*

Exercício 19. *Verifique que os pontos $A = (2, 1)$, $B = (-1, 3)$ e $C = (4, -2)$ formam um triângulo. Determine o perímetro e a área deste triângulo.*

Exercício 20. *Prove que o triângulo, cujos vértices são $(2, 2)$, $(-4, -6)$ e $(4, -12)$, é retângulo.*

Exercício 21. *Determinar x de modo que o triângulo de vértices $A = (4, 5)$, $B = (1, 1)$ e $C = (x, 4)$ seja retângulo em B.*

Exercício 22. *Dados $A = (x, 5)$, $B = (-2, 3)$ e $C = (4, 1)$, obter x tal que A equidiste de B e C.*

Exercício 23. *Dados os pontos $A = (8, 11)$, $B = (-4, -5)$ e $C = (-6, 9)$, obter o circuncentro do triângulo ABC.*

Exercício 24. *Dados os pontos $M = (a, 0)$ e $N = (0, a)$, determinar P de modo que o triângulo MNP seja equilátero.*

Exercício 25. *Dados os pontos $B = (2, 3)$ e $C = (-4, 1)$, determinar o vértice A do triângulo ABC, sabendo que é ponto do eixo Oy e que vê o segmento $\overline{BC}$ sob ângulo reto.*

Exercício 26. *Dados $A = (-2, 4)$ e $B = (3, -1)$, vértices consecutivos de um quadrado, determinar os outros dois vértices.*

Exercício 27. *Calcular o comprimento da mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC onde $A = (0, 0)$, $B = (3, 7)$ e $C = (5, -1)$.*

Exercício 28. *Dados os vértices consecutivos $A = (-2, 1)$ e $B = (4, 4)$, de um paralelogramo, e o ponto $E = (3, -1)$, intersecção de suas diagonais, determinar os outros dois vértices.*

Exercício 29. *Do triângulo ABC são dados: o vértice $A = (2, 4)$, o ponto $M = (1, 2)$ médio do lado $\overline{AB}$ e ponto $N = (-1, 1)$ médio do lado $\overline{BC}$. Calcular o perímetro deste triângulo.*

Exercício 30. *Se $M = (2, 1)$, $N = (3, 3)$ e $P = (6, 2)$ são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente, de um triângulo ABC, determinar as coordenadas de A, B e C.*

Exercício 31. *Num triângulo ABC são dados: $A = (2, 0)$; $M = (-1, 4)$, que é ponto médio do lado $\overline{AB}$; $d(A, B) = 10$ e $d(B, C) = 10\sqrt{2}$. Obter os outros vértices de ΔABC.*

Exercício 32. *Provar que os pontos médios dos lados do quadrilátero $ABCD$ são vértices de um paralelogramo.*

Exercício 33. *O quadrilátero de vértices $A = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $B = (\frac{1}{2}, 2)$, $C = (2, -\frac{3}{2})$ e $D = (0, -\frac{5}{2})$ é um paralelogramo? Justifique sua resposta.*

Exercício 34. *Mostre que a área do triângulo determinado pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) é $\frac{|D|}{2}$, onde*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Exercício 35. *O losango $ABCD$ tem diagonal $\overline{DB}$ paralela ao vetor $\vec{v} = (1, 2)$. Se $A = (-1, 2)$ e $B = (3, 5)$; determine os outros vértices de $ABCD$.*

Exercício 36. *Um trapézio é dito isósceles quando os seus lados **não** paralelos são congruentes. O trapézio isósceles $ABCD$ tem lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, onde $\overline{AD}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$. Se $A = (0, 0)$, $B = (0, 2)$ e $C = (2, 3)$, determine o vértice D.*

Exercício 37. *Os pontos* $(1,3)$, $(2,5)$ *e* $(49,100)$ *são colineares?*

Exercício 38. *Determinar* y *para que os pontos* $(3,5)$, $(-3,8)$ *e* $(4,y)$ *sejam colineares.*

Exercício 39. *Mostrar que* $A=(a,2a+1)$, $B=(a+1,2a+1)$ *e* $C=(a+2,2a+5)$ *são colineares para todo valor de* $a\in\mathbb{R}$.

Exercício 40. *Se* $A=(0,a)$, $B=(a,-4)$ *e* $C=(1,2)$, *para quais valores de* a *existe o triângulo* ABC*?*

2. Retas e equações

Dado que os pontos "ganharam" coordenadas e uma reta é um conjunto de pontos, vamos investigar o que se pode dizer das coordenadas dos pontos dessa reta.

Definição 2. *Diremos que um vetor* $\vec{v}$ ***é um vetor diretor de uma reta*** r *se, e somente se,* $\vec{v}//r$ *e* $\vec{v}$ *é não nulo.*

Proposição 4. *Sejam* r *uma reta,* $A\in r$ *e* $\vec{v}$ *um vetor diretor de* r. *Para* X, *ponto,*

$$X\in r \text{ se, e somente se, existe (único) } \lambda\in\mathbb{R} \text{ tal que } X=A+\lambda\vec{v}.$$

Demonstração. Dado que $A\in r$ e $\vec{v}\neq\vec{0}$, se X é ponto,

$$X\in r \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AX}//r \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AX}//\vec{v} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AX}=\lambda\vec{v}, \text{ para algum } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Fixemos $X\in r$, logo $\overrightarrow{AX}=\lambda\vec{v}$, para $\lambda\in\mathbb{R}$. Sendo assim, $X=A+\overrightarrow{AX}=A+\lambda\vec{v}$. Se $X=A+\mu\vec{v}$, para algum $\mu\in\mathbb{R}$, então $\overrightarrow{AX}=\lambda\vec{v}=\mu\vec{v}$. Visto que $\vec{v}$ não é nulo, $\lambda=\mu$ e garantimos a unicidade. Por outro lado, se $X=A+\beta\vec{v}$, então $\overrightarrow{AX}=\beta\vec{v}$ e daí $X\in r$. □

Definição 3. *Sejam* A *um ponto e* $\vec{v}\neq 0$. *Fica determinada uma* ***única*** *reta* r *tal que* $A\in r$ *e* $\vec{v}//r$. *A equação*

$$X=A+\lambda\vec{v} \ (\text{para } \lambda\in\mathbb{R})\ .$$

é chamada de ***equação vetorial da reta*** r *ou* ***equação da reta*** r ***na forma vetorial****. Muitas vezes a reta* r *será chamada* ***a reta que passa por*** A ***e é paralela a*** $\vec{v}$. *Essa situação será representada por*

$$r\colon X=A+\lambda\vec{v} \ (\text{para } \lambda\in\mathbb{R})\ .$$

É importante observar que reta não tem equação vetorial única, pois, quando fixamos outro ponto da reta ou outro vetor diretor da reta, a equação pode efetivamente mudar.

Proposição 5. *Sejam* r, *reta,* A *e* B, *pontos, e* $\vec{v}$ *e* $\vec{u}$, *vetores não nulos. Então "*$X=A+\lambda\vec{v}$ *(para* $\lambda\in\mathbb{R}$*)" e "*$Y=B+\mu\vec{u}$ *(para* $\mu\in\mathbb{R}$*)" são equações vetoriais de* r *se, e somente se,* $A\in r$ *e* $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{u}$ *são paralelos a* r.

Demonstração. Suponhamos que "$X=A+\lambda\vec{v}$ (para $\lambda\in\mathbb{R}$)" e "$Y=B+\mu\vec{u}$ (para $\mu\in\mathbb{R}$)" sejam equações vetoriais da reta r. Daí $A,B\in r$ e $\overrightarrow{AB}//r$. Naturalmente $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são paralelos a r.

Agora suponhamos que $A\in r$ e $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ e $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ são paralelos a r. Naturalmente $B\in r$. Logo as equações citadas anterioremente são equações vetoriais de r. □

Se fixamos um sistema de coordenadas para o plano e seja $A=(x_0,y_0)$, um ponto e $\vec{v}=(p,q)$, vetor não nulo, então, para $X=(x,y)$,

$$X\in r \quad\Leftrightarrow\quad (x,y)=(x_0,y_0)+\lambda(p,q), \text{ para algum } \lambda\in\mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda p \\ y=y_0+\lambda q \end{cases}, \text{ para algum } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Sendo assim, a reta que passa por A e é paralela ao vetor $\vec{v}$ é descrito por um sistema de equações que será chamada de **sistema de equações paramétricas** para a reta.

Proposição 6. *Sejam* $A=(x_0,y_0)$ *um ponto,* $\vec{v}=(p,q)$ *um vetor e* r *a reta que passa por* A *e é paralela a* r. *Então, para o ponto* $X=(x,y)$,

$$X\in r \text{ se, e somente se, } qx-py+(py_0-qx_0)=0.$$

Demonstração. Observamos que

$$X \in r \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AX}//\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0, y - y_0)//(p, q) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & p \\ y - y_0 & q \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad q(x - x_0) - p(y - y_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad qx - py + (py_0 - qx_0) = 0 \ .$$

□

É importante notar que a equação "$qx-py+(py_0-qx_0) = 0$" pode ser escrita como "$ax+by+c = 0$", para $a, b, c \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Teorema 7. *Sejam $A, B, C \in \mathbb{R}$ tais que $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. O conjunto dos pontos $X = (x, y)$ que satisfazem a equação $Ax + By + C = 0$ é um reta perpendicular ao vetor (A, B).*

Demonstração. Sejam $\vec{n} = (A, B)$ e $\vec{v} = \vec{n}^{\perp}$. Como $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, então $\vec{n} \neq \vec{0}$. Sejam $x_0 = -\frac{AC}{\|\vec{n}\|^2}$, $y_0 = -\frac{BC}{\|\vec{n}\|^2}$ e $P = (x_0, y_0)$. Como

$$Ax_0 + By_0 + C = \frac{-A^2C - B^2C}{\|\vec{n}\|^2} + C = -\frac{(A^2 + B^2)C}{\|\vec{n}\|^2} + C = 0 \ ,$$

conclui-se que P satisfaz a equação $Ax+By+C = 0$. Ainda $C = -Ax_0-By_0$. Para o ponto $X = (x, y)$,

$$\begin{gathered} Ax + By + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ 0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) = (A, B) \bullet (x - x_0, y - y_0) = \vec{n} \bullet \overrightarrow{PX} = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PX}//\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad X = P + \lambda\vec{v} \text{ (para } \lambda \in \mathbb{R}), \end{gathered}$$

ou equivalentemente, X está na reta que passa por P e é paralela ao vetor $\vec{v}$. Como $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{n}$, a reta é perpendicular a $\vec{n}$. □

Definição 4. *Toda equação da forma "$Ax + By + C = 0$" (com $A \neq 0$ ou $B \neq 0$), que descreve os pontos de uma reta r, será chamada de **equação geral da reta** r ou **equação de** r **na forma geral**. Indicaremos essa situação por*

$$r\colon Ax + By + C = 0 \ .$$

Exercício 41. *Obtenha equação geral para as seguintes retas:*

(1) eixo das abscissas
(2) eixo das ordenadas
(3) bissetriz dos quadrantes ímpares
(4) bissetriz dos quadrantes pares

Exercício 42. *Dados $A = (-3, 4), B = (2, 9), C = (2, 7)$ e $D = (4, 5)$, obtenha $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$.*

Exercício 43. *Dados $A = (-5, -5)$, $B = (1, 5)$, $C = (19, 0)$ e $r\colon 5x - 3y = 0$, pergunta-se: r passa pelo baricentro do triângulo ABC?*

Exercício 44. *Determinar o ponto P, pertencente ao eixo das abscissas, sabendo que é equidistante de $B = (1, 3)$ e $C = (-3, 5)$.*

Exercício 45. *Determinar o ponto P, da bissetriz dos quadrantes pares, que equidista de $A = (8, -8)$ e $B = (12, -2)$.*

Exercício 46. *(1) Dados $A = (1, 1)$ e $B = (10, -2)$, obter o ponto no qual $\overleftrightarrow{AB}$ encontra o eixo Ox.*
(2) Dados $A = (3, 1)$ e $B = (5, 5)$, obter o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta o eixo Oy.
(3) Dados $A = (2, -3)$ e $B = (8, 1)$, obter o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta a bissetriz dos quadrantes ímpares.
(4) Dados $A = (2, 4)$ e $B = (-4, 2)$, obter o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta a bissetriz dos quadrantes pares.

Exercício 47. *Determinar $P = (a, b)$ colinear simultaneamente com $A = (-1, -2)$ e $B = (2, 1)$ e com $C = (-2, 1)$ e $D = (1, -4)$.*

Exercício 48. *Ache P da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $d(A, P) = 5$, para $A = (0, -25)$ e $B = (-2, -11)$.*

Corolário 2. *Sejam $r\colon Ax + By + C = 0$ e $s\colon Dx + Ey + F = 0$, retas. Então*

$$r//s \quad \text{se, e somente se,} \quad \begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Sejam $\overrightarrow{n_1} = (A, B)$ e $\overrightarrow{n_2} = (D, E)$.

Suponhamos que $r//s$ e seja $\vec{v}$ é um vetor diretor de r. Consequentemente v também é vetor diretor de s. Pelo teorema anterior, temos que $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ são ambos ortogonais a $\vec{v}$ e consequetemente paralelos a $\vec{v}^{\perp}$. Dado que os três vetores citados são não nulos, $\overrightarrow{n_1}//\overrightarrow{n_2}$ e o determinante do enunciado é nulo.

Suponhamos que o determinante do enunciado é nulo. Logo $\overrightarrow{n_1}//\overrightarrow{n_2}$. Seja $\vec{u} = (B, -A)$ e daí $\vec{u}^{\perp} = \overrightarrow{n_1}$. Sendo assim, $\vec{u}$ é vetor direto de r pois $\vec{u} \perp \overrightarrow{n_1}$. Mas também $\vec{u} \perp \overrightarrow{n_2}$ e assim, $\vec{u}$ é vetor diretor de s. Portanto r e s são retas paralelas. □

Corolário 3. *Sejam $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{R}$ tais que $A \neq 0$, ou $B \neq 0$, ou $A' \neq 0$ ou $B' \neq 0$. As equações "$Ax + By + C = 0$" e "$A'x + B'y + C' = 0$" determinam a mesma reta r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $A' = \lambda A$, $B' = \lambda B$ e $C' = \lambda C$.*

Demonstração. Sejam $\overrightarrow{n_1} = (A, B)$ e $\overrightarrow{n_2} = (D, E)$.

Suponhamos que "$Ax + By + C = 0$" e "$A'x + B'y + C' = 0$" determinem a mesma reta r. Se $\vec{v}$ é um vetor diretor de r, pelo teorema anterior, $\overrightarrow{n_1}//\overrightarrow{n_2}$ e existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$. Portanto $A' = \lambda A$ e $B' = \lambda B$. Como ambos os vetores não são nulos, $\lambda \neq 0$. Dado que $\left(-\frac{AC}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2}, -\frac{BC}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2}\right) \in r$,

$$0 = A'\left(-\frac{AC}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2}\right) + B'\left(-\frac{BC}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2}\right) + C' = C' - \frac{(\lambda A)AC + (\lambda B)BC}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2} = C' - \frac{\lambda(A^2 + B^2)C}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2} = C' - \lambda C \ .$$

Ou seja, $C' = \lambda C$.

Suponhamos que $A' = \mu A$, $B' = \mu B$ e $C' = \mu C$, para $\mu \in \mathbb{R}^*$. Logo

$$A'x + B'y + C' = \mu\big(Ax + By + C\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By + C = 0 \ .$$

Sendo assim, as duas equações determinam a mesma reta. □

Proposição 8. *Sejam $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$, pontos distintos. Para $X = (x, y)$,*

$$X \in \overleftrightarrow{PQ} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Demonstração. Imediato do fato que $X \in \overleftrightarrow{PQ}$ se, e somente se, X, P e Q estão alinhados (ou são colineares). □

Exercício 49. *Determinar as equações das retas suportes dos lados do triângulo cujos vértices são $A = (0, 0)$, $B = (1, 3)$ e $C = (4, 0)$.*

Exercício 50. *Determinar equação geral da reta definida por $(\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$ e $(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2})$.*

Exercício 51. *Uma reta passa por $A = (p, q)$, $B = (3, -2)$ e $(0, 0)$. Qual a relação entre p e q?*

Exercício 52. *Prove que os pontos $A = (a, b + c)$, $B = (b, a + c)$ e $C = (c, a + b)$ são colineares e determinar a equação geral da reta que os contem.*

Exercício 53. *Determinar a intersecção das retas $x + 2y = 3$ e $2x + 3y = 5$.*

Exercício 54. *As retas suportes dos lados de um triângulo são $3x - 4y = 0$, $x + y - 7 = 0$ e $4x - 3y = 0$. Mostrar que esse triângulo é isósceles.*

Exercício 55. *Prove que as retas $2x + 3y - 1 = 0$, $x + y = 0$ e $3x + 4y - 1 = 0$ concorrem no mesmo ponto.*

Exercício 56. *Demonstre que as retas $x - 2y = 0$, $x + 2y - 8 = 0$ e $(1 + k)x + 2(1 - k)y - 8 = 0$ são concorrentes no mesmo ponto para qualquer $k \in \mathbb{R}$.*

Exercício 57. *Determinar a para que as retas $x + 2y - 2a = 0$, $ax - y - 3 = 0$ e $2x - 2y - a = 0$ sejam concorrentes no mesmo ponto.*

Exercício 58. *Demonstrar que as retas $2x + 3y = 0$, $(2k + 1)x + (3k - 2)y + 5 = 0$ e $x - 2y + 5 = 0$ são concorrentes no mesmo ponto, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.*

Exercício 59. *Determinar m de modo que $3x + y - m = 0$, $3x - y + 1 = 0$ e $5x - y - 1 = 0$ delimitem um triângulo.*

Exercício 60. *Qual é a equação da reta que passa por* $P = (3,1)$*, intercepta* $r\colon 3x - y = 0$ *em* A*, intercepta* $s\colon x + 5y = 0$ *em* B*, de modo que* P *é ponto médio de* $\overline{AB}$*.*

Exercício 61. *Dado o ponto* $A = (1,2)$*, determine as coordenadas de dois pontos* P *e* Q *situados respectivamente em* $y = x$ *e* $y = 4x$*, de tal modo que* A *seja o ponto médio de segmentos* $\overline{PQ}$*.*

Exercício 62. *Determinar o perímetro do triângulo* ABC *que verifica as seguintes condições:* A *pertence ao eixo* x*;* B *pertence ao eixo* y*; a reta* $\overleftrightarrow{BC}$ *tem equação* $x - y = 0$*; e a reta* $\overleftrightarrow{AC}$ *tem equação* $x + 2y - 3 = 0$*.*

Exercício 63. *Num triângulo* ABC *sabe-se que:* A *pertence ao eixo das abscissas;* B *pertence à bissetriz* $y = x$*;* $x + y + 5 = 0$ *é equação da reta* $\overleftrightarrow{AC}$*; e* $2x - y - 2 = 0$ *é equação da reta* $\overleftrightarrow{BC}$*.*

Exercício 64. *Determinar* α *de modo que* $P = (3,\alpha)$ *seja ponto do interior do triângulo definido pelas retas* $2x - y = 0$*,* $x + y = 0$ *e* $7x + y - 36 = 0$*.*

Teorema 9. *Sejam* $r\colon Ax + By + C = 0$ *e* $s\colon Dx + Ey + F = 0$ *retas não paralelas. Se* θ *é a medida dos menores ângulos entre* r *e* s*, então*

$$\cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2}\right|}{\|\overrightarrow{n_1}\| \cdot \|\overrightarrow{n_2}\|} \ .$$

onde $\overrightarrow{n_1} = (A,B)$ *e* $\overrightarrow{n_2} = (D,E)$*.*

Demonstração. Sejam $\overrightarrow{v_1} = (B,-A)$ e $\overrightarrow{v_2} = (E,-D)$. Temos que $v_1^{\perp} = \overrightarrow{n_1}$ e é vetor diretor de r. Também $\overrightarrow{v_2}^{\perp} = \overrightarrow{n_2}$ e é vetor diretor da reta s. Facilmente concluímos que

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{ang}(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}) & , \text{ se } \operatorname{ang}(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}) \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - \operatorname{ang}(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}) & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto $\cos\theta = \left|\cos(\operatorname{ang}(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}))\right|$, ou seja,

$$\cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{v_1} \bullet \overrightarrow{v_2}\right|}{\|\overrightarrow{v_1}\| \cdot \|\overrightarrow{v_2}\|} = \frac{|BE + AD|}{\|\overrightarrow{n_1}\| \cdot \|\overrightarrow{n_2}\|} = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2}\right|}{\|\overrightarrow{n_1}\| \cdot \|\overrightarrow{n_2}\|} \ .$$

□

Exercício 65. *Determinar a posição relativa das seguintes retas, tomadas duas a duas:*

(1) $r\colon 2x - y + 3 = 0$	*(3)* $t\colon 3x - 6y = -3$	*(5)* $v\colon 2x + 4y + 3 = 0$
(2) $s\colon 2x - y + 5 = 0$	*(4)* $u\colon x - y + 3 = 0$	*(6)* $w\colon 4x - 2y = -6$

Exercício 66. *Discutir a posição relativa entre* r *e* s*, para:*

(1) $r\colon (m-1)x + my - 1 = 0$ *e* $s\colon (1-m)x + (m+1)y + 1 = 0$*.*
(2) $r\colon mx + y - p = 0$ *e* $s\colon 3x + 3y - 7 = 0$*.*

Corolário 4. *Nas mesmas condições da teorema anterior,* $r \perp s$ *se, e somente se,* $AD + BE = 0$*.*

Exercício 67. *Mostre que, para as retas* $r\colon y = a_1x + b_1$ *e* $s\colon y = a_2x + b_2$*,*

$$r \perp s \textit{ se, e somente se, } a_1a_2 = -1.$$

Exercício 68. *Sejam* $r\colon y = a_1x + b_1$ *e* $s\colon y = a_2x + b_2$*, retas não paralelas e não perpendiculares. Mostre que, se* θ *é a medida do menor ângulo entre* r *e* s*, então* $\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_1}\right|$*.*

Teorema 10. *Seja* r *a reta que tem equação vetorial* $r\colon X = P + \lambda\vec{v}$ *(para* $\lambda \in \mathbb{R}$*). Dado um ponto* Q*, o ponto de* r *mais próximo de* Q *é o ponto* $R = P + \operatorname{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{PQ}$*.*

Demonstração. Fixemos $\lambda \in \mathbb{R}$ e seja $X = P + \lambda\vec{v}$. Logo $\overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} - \lambda\vec{v}$ e

$$\|\overrightarrow{XQ}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ} - \lambda\vec{v}\|^2 = \left(\overrightarrow{PQ} - \lambda\vec{v}\right) \bullet \left(\overrightarrow{PQ} - \lambda\vec{v}\right) = \|\vec{v}\|^2\lambda^2 - 2\left(\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{v}\right)\lambda + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 =$$
$$\left(\|\vec{v}\|\lambda - \frac{\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)^2 + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)^2 \ .$$

Tomemos $\mu = \left(\frac{\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)$ e $R = P + \mu\vec{v}$. Naturalmente $R \in r$ e $\overrightarrow{PR} = \mu\vec{v} = \operatorname{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{PQ}$. Ainda $\|\overrightarrow{RQ}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)^2$. Se $X \in r$, então $\|\overrightarrow{XQ}\|^2 \ge \|\overrightarrow{RQ}\|^2$, ou equivalentemente, $\|\overrightarrow{XQ}\| \ge \|\overrightarrow{RQ}\|$. Sendo assim, R é ponto de r mais próximo de Q. □

Corolário 5. *Seja r a reta de equação geral $r\colon Ax+By+C=0$. Dado um ponto $Q=(\alpha,\beta)$, a distância de Q à reta r é*

$$d(Q,r)=\frac{\left|A\alpha+B\beta+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\ .$$

Demonstração. A distância do ponto Q à reta r é a distância de Q ao ponto de r mais próximo de Q.

Sejam $\vec{n}=(A,B)$ e $\vec{v}=\vec{n}^{\perp}$. Temos que $\vec{n}$ é perpendicular a r e que $\vec{v}$ é vetor diretor de r. Tomemos $P\in r$. Por resultado anterior, $\overrightarrow{PQ}=\mathrm{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}+\mathrm{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{PQ}$. Por outro lado, $\overrightarrow{PR}=\mathrm{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{PQ}$. Daí

$$\mathrm{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}-\mathrm{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{RQ}\ .$$

Logo $d(Q,r)=\|\overrightarrow{RQ}\|=\|\mathrm{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}\|=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\bullet\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$. Se $P=(x_0,y_0)\in r$, então $C=-Ax_0-By_0$. Logo

$$\overrightarrow{PQ}\bullet\vec{n}=(\alpha-x_0,\beta-y_0)\bullet(A,B)=A\alpha+B\beta-Ax_0-By_0=A\alpha+B\beta+C\ ,$$

e concluímos a tese. □

Exercício 69. *Achar a distância da reta* $r\colon\begin{cases}x=-2+3t\\ y=-7+2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, *à origem.*

Exercício 70. *Calcular a distância P à reta r nos seguintes casos:*

(1) $P=(-3,-1)$ *e* $r\colon 3x-4y+8=0$
(2) $P=(3,2)$ *e* $r\colon 5x-5y+2=0$
(3) $P=(1,-2)$ *e* $r\colon \frac{x}{12}+\frac{y}{5}=1$
(4) $P=(-2,3)$ *e* $r\colon\begin{cases}x=7t-1\\ y=24t+1\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$
(5) $P=(-1,-2)$ *e* $r\colon \cos\frac{\pi}{3}\cdot x+\sin\frac{\pi}{3}\cdot y=5$

Exercício 71. *Calcular o comprimento da altura $\overline{AH}$ do triângulo $A=(-3,0)$, $B=(0,0)$ e $C=(6,8)$. Determine as coordenadas do ponto H.*

Exercício 72. *O trapézio de vértices $A=(0,0)$, $B=(7,1)$, $C=(6,5)$ e $D=(-8,3)$ tem qual altura?*

Exercício 73. *O ponto $P=(2,-5)$ é um vértice de um quadrado que tem um dos seus lados não adjacentes a P sobre a reta $x-2y-7=0$. Qual a área do quadrado?*

Exercício 74. *Calcular a distância entre as retas $3x+4y-13=0$ e $3x+4y+7=0$.*

Exercício 75. *Calcular a distância entre as retas $ax+by+c=0$ e $ax+by+d=0$.*

Exercício 76. *Determinar os pontos da reta $y=2x$ que estão à distância 2 da reta $4x+3y=0$.*

Exercício 77. *Determinar as equações da(s) reta(s) que forma(m) ângulo de medida $\frac{\pi}{4}$ com o eixo x e estão à distância $\sqrt{2}$ do ponto $P=(3,4)$.*

Exercício 78. *Obter uma reta paralela a $r\colon x+y+6=0$ e distante $\sqrt{2}$ do ponto $C=(1,1)$.*

Exercício 79. *Determinar as equações das perpendiculares à reta $r\colon 7x-24y+1=0$, as quais estão à distância 3 do ponto $P=(1,0)$.*

Exercício 80 (Pesquise!)**.** *Defina "simetria com relação a uma reta". Sejam $P=(\alpha,\beta)$ e $r\colon Ax+By+C=0$. Mostre que $Q=\left(\alpha-\frac{2A(A\alpha+B\beta+C)}{A^2+B^2},\beta-\frac{2B(A\alpha+B\beta+C)}{A^2+B^2}\right)$ é o ponto simétrico a P com relação à reta r.*

Exercício 81. *Determine o ponto simétrico de (α,β) com relação às retas:*

(1) $x=0$ *(2)* $y=0$ *(3)* $x-y=0$ *(4)* $x+y=0$ *(5)* $x-y=1$ *(6)* $y=2x+1$

Exercício 82. *Sejam $A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$ dois pontos distintos. Mostre que os pontos que equidistam de A e B determinam uma reta – denominada* ***mediatriz do segmento*** *$\overline{AB}$. Determine características da mediatriz do segemento $\overline{AB}$ em função de A e B.*

COORDENADAS AOS PONTOS DO ESPAÇO. RETAS E PLANOS

MARCELO DIAS PASSOS

Resumo. Estas notas foram digitadas durante os cursos de MATB34 (Geometria Analítica e Álgebra Vetorial) em 2021 (semestres 2021.1 e 2021.2).

Depois de darmos coordenadas aos vetores do Espaço, podemos fazê-lo para os pontos. Logo em seguida estamos aptos a dar equações às retas e aos planos.

1. Coordenadas aos pontos do Espaço

Definição 1. *Direms que $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ é um **sistema de coordendas para os pontos do Espaço** se, e somente se, O é ponto e $\mathcal{B}$ é base para $\mathbb{V}^3$.*

*O ponto O será chamado de **origem** de Σ enquando $\mathcal{B}$ de **base**. Por vezes escreveremos $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ no lugar de $\big(O, (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\big)$.*

Para cada P, ponto, uma vez que $\overrightarrow{OP} \in \mathbb{V}^3$, diremos que

$$P = (x, y, z)_\Sigma \text{ se, e somente se, } \overrightarrow{OP} = (x, y, z)_\mathcal{B}.$$

*Neste caso, diremos que P **tem coordenadas** (x, y, z) **com relação ao sistema** Σ. A primeira coordenda do par citado é chamado de **abscissa**, a segunda de **ordenada** e a terceira de **cota**. A reta que passa pela origem e é paralela ao primeiro vetor da base é chamado de **eixo das abscissas**; a reta que também passa pela origem e é paralela ao segundo vetor da base é chamada de **eixo das ordenadas**; enquando a reta que passa pela origem e é parelela ao terceiro vetor da base é o **eixos das cotas**. Os três eixos serão chamados de **eixos coordenados**. Os **planos coordenados** são aqueles que passam pela origem e são paralelos a dois dos eixos coordenados.*

*Se a base é ortonormal, diremos que o sistema é **ortogonal**.*

Observamos que, se $\Sigma = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, para $P \in \pi$,

$$P = (x, y, z)_\Sigma \text{ se, e somente se, } P = O + x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}.$$

Naturalmente, $O = (0, 0, 0)_\Sigma$.

Proposição 1. *Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenada do espaço. Se $A = (a, b, c)_\Sigma$, $B = (x, y, z)_\Sigma$ então $\overrightarrow{AB} = (x - a, y - b, z - c)_\mathcal{B}$.*

Demonstração. Dado que $\overrightarrow{OA} = (a, b, c)_\mathcal{B}$ e $\overrightarrow{OB} = (x, y, z)_\mathcal{B}$, então

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x - a, y - b, z - c)_\mathcal{B}\ .$$

□

Corolário 1. *Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenada do espaço. Se $A = (a, b, c)_\Sigma$ e $\vec{v} = (p, q, r)_\mathcal{B}$, então $A + \vec{v} = (a + p, b + q, c + r)_\Sigma$.*

Demonstração. Seja $Q = A + \vec{v}$. Daí $Q = (x, y, z)_\Sigma$. Como $\overrightarrow{AQ} = \vec{v} = (x - a, y - b, z - c)_\mathcal{B}$, então $p = x - a$, $q = y - b$ e $r = z - c$. Ou seja, $Q = (a + p, b + q, c + r)_\Sigma$. □

Exercício 1. *Dados os pontos $A = (2, -2, 3)$ e $B = (1, 1, 5)$, e o vetor $\vec{v} = (1, 3, 4)$, calcular:*
(1) $A + 3\vec{v}$ *(2)* $\overrightarrow{BA} - \vec{v}$ *(3)* $B + 2\overrightarrow{AB}$ *(4)* $2\vec{v} - 3\overrightarrow{AB}$

Exercício 2. *Dados os pontos $A = (3, -4, -2)$ e $B = (-2, 1, 0)$, determinar o ponto N pertencente ao segmento $\overline{AB}$ tal que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.*

Exercício 3. *Dados os pontos $A = (1, -2, 3)$ $B = (2, 1, 4)$ e $C = (-1, -3, 1)$, determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.*

Exercício 4. *Sendo $A = (2, -5, 3)$ e $B = (7, 3, -1)$ vértices consecutivos de um paralelogramo $ABCD$ e $M = (4, -3, 3)$ o ponto de intersecção das diagonais, determinar os vértices C e D.*

Date: 2021.

Exercício 5. *Determinar os três vértices de uma triângulo, sabendo que os pontos médios de seus lados são $M = (5, 0, -2)$, $N = (3, 1, -3)$ e $P = (4, 2, 1,)$.*

Exercício 6. *Dados A e B, pontos cujas coordenadas são conhecidas, determine fórmula para as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta $\overline{AB}$.*

Exercício 7. *Sendo $A = (-2, 1, 3)$ e $B = (6, -7, 1)$ extremidades de um segmento, determinar:*

(1) os pontos C, D e E, nesta ordem, que dividem o segmento $\overline{AB}$ em quatro partes de mesmo comprimento;
(2) os pontos F e G, nesta ordem, que dividem o segmento $\overline{AB}$ em três partes de mesmo comprimento.

Exercício 8. *Dados os pontos $A = (-1, 0, 5)$, $B = (2, -1, 4)$ e $C = (-4, 7, 2)$, determinar x tal que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BP}$ sejam ortogonais, sendo $P = (x, 0, x - 3)$.*

Proposição 2. *Seja Σ um sistema de coordenada ortogonal. Se $A = (a, b, c)_\Sigma$, $B = (x, y, z)_\Sigma$ então $d(A, B) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$.*

Demonstração. É imediato do fato que a base é ortonormal e $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(x - a, y - b, z - c)$ com relação a ela. □

Exercício 9. *Prove que os pontos $A = (-1, 2, 3)$, $B = (-3, 6, 0)$ e $C = (-4, 7, 2)$ são vértices de um triângulo retângulo.*

Exercício 10. *Dados os pontos $A = (m, 1, 0)$, $B = (m - 1, 2m, 2)$ e $C = (1, 3, -1)$, determine m de modo que o triângulo ABC seja retângulo em A. Calcule a área do triângulo.*

Exercício 11. *Prove que os pontos $A = (3, 4, 4)$, $B = (2, -3, 4)$ e $C = (6, 0, 4)$ são vértices de um triângulo. Determine o ângulo interno ao vértice B.*

Exercício 12. *Dados os pontos $A = (3, 4, -2)$, $B = (1, 2, 4)$ e $C = (2, 1, 6)$, determine o ponto **simétrico** a A com relação à reta que passa por B e C.*

Exercício 13. *Sejam $\triangle ABC$ e suponha conhecidas as coordenadas dos seus vértices. Determine fórmula para as coordenadas do baricentro de $\triangle ABC$.*

Exercício 14. *Consideremos $ABCD$ um tetraedro e tomemos a base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ e o sistema de coordenadas $\Sigma = (A, \mathcal{B})$. Sejam P, Q, R, S, T e U os pontos médios das arestas $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente; enquanto E, F, G e H são os baricentros das faces ΔBCD, ΔACD, ΔABD e ΔABC, respectivamente.*

(a) *Determine as coordenadas $B, C, D, E, F, G, H, P, Q, R, S, T$ e U no sistema Σ.*
(b) *Uma **bimediana de um tetraedro** é o segmento determinado pelos pontos médios de duas arestas opostas. Quais são as bimedianas do tetraedro $ABCD$? Mostre que todas as **3 (três)** bimedianas do tetraedro $ABCD$ têm o mesmo ponto médio. Esse ponto de encontro das três bimedianas de um tetraedro é chamado de **centróide** do tetraedro $ABCD$.*
(c) *Uma **mediana do tetraedro** é o segmento de reta determinado por um vértice e o baricentro da face oposta. Mostre que todas as **4 (quatro)** medianas do tetraedro $ABCD$ se encontram no seu centróide. Este divide cada mediana em qual proporção?*

Exercício 15. *Se $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$ e $D = (x_4, y_4, z_4)$. Supondo que $ABCD$ formam um tetraedro, determine fórmula para o centróide do tetraedro $ABCD$.*

Antes de discutirmos colinearidade entre pontos vamos discutir coplanaridade.

Teorema 3. *Se $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$ e $D = (x_4, y_4, z_4)$, então A, B, C e D são coplanares se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Demonstração. Primeiro observemos que o determinante descrito no enunciado do teorema não muda, se tomamos a segunda linha subtraída por x_1 vezes a primeira linha, a segunda subtraída por y_1 vezes a primeira e por fim a terceira subtraída por z_1 vezes a primiera. Ou seja,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ 0 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} ,$$

lembrando que a última igualdade vale quando desenvolvemos o determinante por cofatores da primeira coluna. Uma vez que $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ e $\overrightarrow{AD} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$, concluímos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] .$$

Sendo assim, A, B, C e D são coplanares se, e somente se, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ são coplanares, ou seja, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$. □

Exercício 16. *Nas mesmas condições do teorema anterior, suponha que A, B, C e D formam um tetraedro e determine fórmula para seu volume.*

Exercício 17. *Suponha que $A = (a, b, c)$, $B = (x, y, z)$ e $C = (p, q, r)$.*

(1) Mostre que A, B e C estão alinhados se, e somente se, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x & p \\ b & y & q \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x & p \\ c & z & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix}$.

(2) Mostre que, se A, B e C estão alinhados, então $\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = 0$.

(3) Apresente exemplo de pontos A, B e C, ***não alinhados*** *tais que* $\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = 0$.

2. Retas e equações

Lembremos que, dados um ponto A e um vetor $\vec{v} \neq 0$, fica determinada uma **única** reta r tal que $A \in r$ e $\vec{v} // r$. A reta r tem equação vetorial

$$X = A + \lambda \vec{v} \text{ (para } \lambda \in \mathbb{R}) .$$

Exercício 18. *Verifique se os pontos abaixo pertencem à reta $r\colon X = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 1)(\lambda \in \mathbb{R})$.*

(1) $(4, 1, -1)$ *(2)* $(3, 1, 2)$ *(3)* $(-1, -1, 0)$

Fixado um sistema de coordenadas para o espaço, então $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$, e para X,

$$X = (x, y, z) \in r \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} , \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, a reta que passa por A e é paralela ao vetor $\vec{v}$ é descrita por um sistema de equações que é chamado de **sistema de equações paramétricas** para a reta ou simplesmente por **equações da reta na forma paramétrica**.

Exercício 19. *Ache equações paramétricas da reta que passa por $A = (3, 3, 3)$ e é paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$, sendo $B = (1, 1, 0)$ e $C = (-1, 0, -1)$.*

Exercício 20. *Dados a reta $r\colon X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$ e os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$, ache o ponto de r equidistante de A e B.*

Exercício 21. *Calcule a distância do ponto* $P = (1, 0, 1)$ *à reta* $r\colon X = (0, 0, 0) + \lambda(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})(\lambda \in \mathbb{R})$.

Exercício 22. *Mostre que os pontos cujas coordenadas satisfazem o sistema* $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ *formam uma reta. Explicite uma equação vetorial desta.*

Retornemos à reta r que passa por $A = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (a, b, c)$, não nulo. Agora suponhamos que **todas** as coordenadas de $\vec{v}$ sejam não nulas. Observamos que, para $X = (x, y, z)$,

$$X \in r \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \text{, para algum } \lambda \in \mathbb{R}. \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \ .$$

Este último sistema de equações é chamado de **sistema de equações da reta r na forma simétrica** ou, mais simplesmente, **equações da reta r na forma simétrica**.

Exercício 23. *Mostre que as equações* $\frac{2x-1}{3} = \frac{1-y}{2} = z + 1$ *descrevem uma reta. Exiba equação vetorial e sistema de equações paramétricas para essa reta.*

Exercício 24. *Dados os pontos* $A = (1, 2, 1)$ *e* $B = (3, 0, -1)$*, verifique se são concorrentes as retas* $\overleftrightarrow{AB}$ *e* $r\colon X = (4, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1)$ *(para* $\lambda \in \mathbb{R}$*). Se forem, determine o ponto de interseção.*

Exercício 25. *Verifique se as retas r e s são concorrentes e, se forem, obtenha o ponto de interseção.*

(1) $r\colon \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ *(para* $\lambda \in \mathbb{R}$*)* $\qquad s\colon \begin{cases} x = 9 - 4\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 2 - 2\mu \end{cases}$ *(para* $\mu \in \mathbb{R}$*)*

(2) $r\colon \begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 1 + 8\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$ *(para* $\lambda \in \mathbb{R}$*)* $\qquad s\colon x - 1 = y - 4 = z$

(3) $r\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = z$ $\qquad s\colon x = \frac{y}{3} = \frac{1+z}{2}$

(4) $r\colon X = (3, -1, 2) + \lambda(-2, 3, 1)$ *(para* $\lambda \in \mathbb{R}$*)* $s\colon X = (9, -10, -1) + \mu(4, -6, -2)$ *(para* $\mu \in \mathbb{R}$*)*

Exercício 26. *Sejam r a reta que passa pelo ponto A e é paralela ao vetor* $\vec{v} \neq \vec{0}$*, e P um ponto. Mostre que, se* $B \in r$ *e* $\vec{u}$ *também é vetor diretor de r, então* $A + \mathrm{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{AP} = B + \mathrm{proj}_{\vec{u}}\overrightarrow{BP}$.

Proposição 4. *Sejam r a reta que passa pelo ponto A e é paralela ao vetor* $\vec{v} \neq \vec{0}$*, e P um ponto. Então a distância de P a r é*

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} \ .$$

Demonstração. Se $P \in r$, então $d(P, r) = 0$. Ainda $\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, visto que $\overrightarrow{AP} // \vec{v}$.

Suponhamos $P \notin r$ e seja $B = A + \vec{v}$. Logo a distância de P a r é a altura do triângulo $\triangle PAB$ com relação à base $\overline{AB}$. Seja h o tamanho dessa altura. Daí a área de $\triangle PAB$ é $\frac{h\|\overrightarrow{AB}\|}{2}$. Por outro lado essa mesma área é $\frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{2}$. Como $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, concluímos que

$$d(P, r) = h = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} \ .$$

□

Exercício 27. *Nas mesmas condições da proposição anterior mostre que, se* $B \in r$ *e* $\vec{u}$ *também é vetor diretor de r, então* $d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{BP} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Exercício 28. *A altura e a mediana relativas ao vértice B do triângulo* ΔABC *estão contidas, respectivamente, em* $r\colon X = (-6, 0, 3) + \lambda(3, 2, 0)$ *(para* $\lambda \in \mathbb{R}$*) e* $s\colon X = (0, 0, 3) + \mu(3, -2, 0)$ *(para* $\mu \in \mathbb{R}$*). Sendo* $C = (4, -1, 3)$*, determine A e B.*

Definição 2. *Para as retas r e s, dizemos são* ***reversas*** *se, e somente se, não existe plano que as contenha.*

Se r e s são retas **não** reversas, fixemos plano π que as contenha. Sendo assim, r e s podem ser:

(1) paralelas e coincidentes, ou seja, $r = s$. Neste caso, r e s têm os mesmos vetores diretores e $r \cap s \neq \emptyset$.

(2) paralelas e disjuntas. Neste caso, r e s têm os mesmos vetores diretores mas $r \cap s = \emptyset$.
(3) concorrentes. Neste caso, $r \cap s$ é unitário.

Exercício 29. *Sejam r e s retas paralelas. Mostre que, para $X, Y \in r$, $d(X, s) = d(Y, s)$.*

Proposição 5. *Sejam A e B, pontos, e $\vec{v}$ e $\vec{u}$, vetores não nulos. Sejam $r\colon X = A + \lambda\vec{u}$ (para $\lambda \in \mathbb{R}$) e $s\colon Y = B + \mu\vec{v}$ (para $\mu \in \mathbb{R}$) retas **não** paralelas. Temos que r e s são retas reversas se, e somente se, $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] \neq 0$.*

Neste caso, a distância entre r e s é $d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

Demonstração. Dado que r e s não são paralelas, sabemos que $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ e deste modo $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ é base para $\mathbb{V}^3$. Logo existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{n} \ .$$

Observamos que $\overrightarrow{AB} \bullet \vec{n} = \gamma \|\vec{n}\|^2$, pois $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ambos ortogonais a $\vec{n}$. Logo $\gamma \|\vec{n}\|^2 = [\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]$. Seja $P = A + \alpha\vec{u}$. Sendo assim, $P \in r$ e

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \alpha\vec{u} - \overrightarrow{AB} = -\beta\vec{v} - \gamma\vec{n} \ .$$

Logo

$$d(P, s) = \frac{\|\overrightarrow{BP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|\gamma| \, \|\vec{n} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|\gamma| \, \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = |\gamma| \, \|\vec{n}\| \ ,$$

dado que $\vec{v} \perp \vec{n}$. Ainda $d(P, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

Suponhamos que r e s são reversas. Logo $r \cap s = \emptyset$ e $P \notin s$. Daí $d(P, s) \neq 0$ e $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] \neq 0$.

Suponhamos agora que r e s não são reversas. Neste caso, dado que não são paralelas, $r \cap s = \{R\}$. Sendo assim, $\overrightarrow{AR} = \lambda\vec{u}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, enquando $\overrightarrow{BR} = \mu\vec{v}$, para algum $\mu \in \mathbb{R}$. Logo

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RB} = \lambda\vec{u} - \mu\vec{v} \ .$$

Já que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ é base, deduzimos que $\alpha = \lambda$, $\beta = -\mu$ e $\gamma = 0$. Logo, $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$. Ainda, $R = P$ e $r \cap s = \{P\}$.

Seja $Q = B - \beta\vec{v}$. Daí $Q \in s$. Observamos que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} = \big(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{n}\big) - \alpha\vec{u} - \beta\vec{v} = \gamma\vec{n} \ .$$

Sendo assim, $\overrightarrow{PQ}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Além disto é ortogonal às retas r e s. Fixemos $X \in r$ e $Y \in s$. Temos que $\overrightarrow{PX} = \delta\vec{u}$, para algum $\delta \in \mathbb{R}$, e $\overrightarrow{QY} = \epsilon\vec{v}$, para algum $\epsilon \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QY}$. Seja $\vec{w} = \overrightarrow{QY} - \overrightarrow{PX} = \epsilon\vec{v} - \delta\vec{u}$. Sendo assim,

$$\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{w} = (\gamma\vec{n}) \bullet (\epsilon\vec{v} - \delta\vec{u}) = 0 \ ,$$

pois $\vec{n} \bullet \vec{u} = 0 = \vec{n} \bullet \vec{v}$. Logo $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{w}$ e, como $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$,

$$\|\overrightarrow{XY}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 \geq \|\overrightarrow{PQ}\|^2 \ .$$

Ou seja, $d(X, Y) \geq d(P, Q)$, para quaisquer $X \in r$ e $Y \in s$. Lembrando que $P \in r$ e que $Q \in s$, temos que $d(r, s) = d(P, Q) = |\gamma| \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$. □

Exercício 30. *Verifique que as duas retas:*

$$r\colon X = (1,1,1) + \lambda(1,0,1),\ \lambda \in \mathbb{R},\ e$$
$$s\colon Y = (1,3,-1) + \mu(-1,0,1),\ \mu \in \mathbb{R}.$$

são reversas; determine os extremos no segmento que é ortogonal a r e a s e a distância de r a s.

Exercício 31. *Dadas as retas*

$$r\colon \begin{cases} x - my + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s\colon x = \frac{y}{m} = z \qquad t\colon \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

calcule m em cada caso:

(1) r e s são paralelas
(2) r e t são concorrentes
(3) r e s são reversas
(4) r, s e t são paralelas a um mesmo plano
(5) s e t são coplanares

3. Planos e equações

Finalmente vamos dar equações aos planos.

Definição 3. *Dado um plano π, toda base $(\vec{u}, \vec{v})$ para os vetores de π também será chamada de* **par de vetores diretores de** π*, ou simplesmente diremos que* $\vec{u}$ **e** $\vec{v}$ **são vetores diretores de** π.

Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não paralelos entre si, e A, ponto, fica determinado um único plano π tal que $A \in \pi$ e $(\vec{u}, \vec{v})$ é par de vetores diretores de π. Lembremos que, para X, ponto, são equivalentes:

(1) $X \in \pi$,
(2) $\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ são coplanares, e
(3) existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Sendo assim,

$$X \in \pi \text{ se, e somente se, } X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ (para } \lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Definição 4. *Sejam A um ponto, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não paralelos. Se π é o plano tal que $A \in \pi$ e de qual $(\vec{u}, \vec{v})$ é par de vetores diretores, a equação*

$$X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \ \textit{(para } \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

é chamada de **equação vetorial do plano** π *ou* **equação do plano** π **na forma vetorial**. *Muitas vezes o plano π será dito* **o plano que passa por** A **e é paralela aos vetores** $\vec{u}$ **e** $\vec{v}$. *Esta situação será representada por*

$$\pi\colon X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \ \textit{(para } \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \ .$$

É importante observar que plano não tem equação vetorial única pois quando fixamos outro ponto da reta ou outros vetores diretores do plano a equação pode efetivamente mudar.

Ainda nas condições da definição, se fixamos um sistema de coordenadas para o espaço, então $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$. Para $X = (x, y, z)$,

$$X \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p), \text{ para } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases}, \text{ para } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, o plano, que passa por A e é paralelos aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é descrito por um sistema de equações que será chamado de **sistema de equações paramétricas do plano** ou ainda **sistema de equações do plano na forma paramétrica**.

Proposição 6. *Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto, $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$ vetores não paralelos e π o plano que passa por A e é paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então, para o ponto $X = (x, y, z)$,*

$$X \in \pi \textit{ se, e somente se, } \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

onde $\vec{u} \wedge \vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $\delta = -(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)$.

Demonstração. Observamos que

$$X \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad [\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}] = \overrightarrow{AX} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \bullet (\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \ .$$

□

É importante notar que na equação "$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$" temos $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$ pois $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ e o vetor $(\alpha, \beta, \gamma) \neq \vec{0}$.

Teorema 7. *Sejam $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tais que $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$. O conjunto dos pontos $X = (x, y, z)$, que satisfazem a equação $Ax + By + Cz + D = 0$, é um plano perpendicular ao vetor (A, B, C).*

Demonstração. Sejam $\vec{n} = (A, B, C)$. Logo $\vec{n} \neq \vec{0}$. Fixemos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{v})$ é base ortogonal. Sejam $x_0 = -\frac{AD}{\|\vec{n}\|^2}$, $y_0 = -\frac{BD}{\|\vec{n}\|^2}$, $z_0 = -\frac{CD}{\|\vec{n}\|^2}$ e $P = (x_0, y_0, z_0)$. Como

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = \frac{-A^2D - B^2D - C^2D}{\|\vec{n}\|^2} + D = -\frac{(A^2 + B^2 + C^2)D}{\|\vec{n}\|^2} + D = 0 \ ,$$

induzimos que P satisfaz a equação $Ax+By+Cz+D=0$ e que $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Por outro lado, para $X=(x,y,z)$, ponto,

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad\Leftrightarrow\quad Ax+By+Cz-Ax_0-By_0-Cz_0=0 \quad\Leftrightarrow$$
$$0=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=(A,B,C)\bullet(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=\vec{n}\bullet\overrightarrow{PX}=0 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{PX}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\ (\text{para } \lambda,\mu\in\mathbb{R}) \quad\Leftrightarrow\quad X=P+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\ (\text{para } \lambda,\mu\in\mathbb{R}),$$

ou equivalentemente, X está no plano que passa por P e é paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Como $\vec{n}$ é perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, o plano é perpendicular a $\vec{n}$. □

Definição 5. *Toda equação da forma "$Ax+By+Cz+D=0$" (com $A\neq 0$ ou $B\neq 0$ ou $C\neq 0$), que descreve os pontos de um plano π, será chamada de **equação geral do plano** π ou **equação de** π **na forma geral**. Indicaremos esta situação por*

$$\pi\colon Ax+By+Cz+D=0\ .$$

Exercício 32. *Obtenha uma equação geral do plano π que passa por $A=(0,1,2)$ e tem vetores diretores $\vec{u}=(4,1,2)$ e $\vec{v}=(2,1,-2)$.*

Exercício 33. *Obtenha uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A=(1,0,2)$ e tem vetor normal $\vec{n}=(1,-1,4)$.*

Exercício 34. *Escreva equações paramétricas para a reta $r=\pi_1\cap\pi_2$, onde $\pi_1\colon 2x-y-3=0$ e $\pi_2\colon 3x+y+2z-1=0$.*

Exercício 35. *Qual o ponto da reta $s\colon X=(-1,3,3)+\lambda(-1,2,3)\ (\lambda\in\mathbb{R})$, que está no plano $\pi\colon x+y+z=1$?*

Exercício 36. *Escreva uma equação vetorial da reta que passa por $A=(1,2,3)$ e é perpendicular ao plano $\pi\colon 2x+y-z=2$.*

Exercício 37. *Obtenha a interseção da reta r com o plano π (se houver):*
(1) $r\colon X=(1,0,1)+\lambda(2,1,3)$ *(para $\lambda\in\mathbb{R}$)* $\qquad \pi\colon x+y+z=20$
(2) $r\colon X=(0,1,1)+\mu(2,1,-3)$ *(para $\mu\in\mathbb{R}$)* $\pi\colon X=(1,0,0)+\lambda(1,0,0)+\mu(0,1,1)$ *(para $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$)*
(3) $r\colon \frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{8}$ $\qquad \pi\colon 2x+y-z-6=0$
(4) $r\colon x-2=3-y=\frac{z-1}{4}$ $\qquad \pi\colon X=(-4,-6,2)+\lambda(2,1,3)+\mu(3,3,2)$ *(para $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$)*

Exercício 38. *Ache uma equação geral do plano σ que passa pelo ponto $P=(1,0,0)$ e **contém** a reta $r\colon \{\ x=2,\quad y=\lambda,\quad z=2+\lambda\ ,\ (\lambda\in\mathbb{R})$.*

Corolário 2. *Sejam $\pi\colon Ax+By+Cz+D=0$ e $\sigma\colon Ex+Fy+Gz+H=0$, planos. Então*

$$\pi//\sigma \quad \textit{se, e somente se,} \quad (A,B,C)//(E,F,G).$$

Demonstração. Sejam $\vec{n_1}=(A,B,C)$ e $\vec{n_2}=(E,F,G)$.

Suponhamos que $\pi//\sigma$ e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores de π. Pelo teorema anterior, sabemos que $\vec{n_1}//(\vec{u}\wedge\vec{v})$. Dado que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ também são vetores diretores de σ, deduzimos que $\vec{n_2}//(\vec{u}\wedge\vec{v})$. Uma vez que $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ e $\vec{u}\wedge\vec{v}$ são todos não nulos, concluímos que $\vec{n_1}//\vec{n_2}$.

Suponhamos que $\vec{n_1}//\vec{n_2}$. Para $\vec{t}$, vetor, $\vec{t}\perp\vec{n_1}$ se, e somente se, $\vec{t}\perp\vec{n_2}$. Portanto todo vetor paralelo a π é paralelo a σ e vice-versa. Daí π e σ são planos paralelos. □

Exercício 39. *Suponhamos que $\pi\colon Ax+By+Cz+D=0$ e $\sigma\colon Ex+Fy+Gz+H=0$ são planos não paralelos. Apresente ponto em $\pi\cap\sigma$. Mostre que $\pi\cap\sigma$ é uma reta. Determine vetor diretor para esta reta.*

Exercício 40. *Mostre que toda reta pode ser escrita como a interseção de dois planos não paralelos.*

Corolário 3. *Sejam $A,B,C,A',B',C'\in\mathbb{R}$ tais que $A\neq 0$, ou $B\neq 0$, ou $C\neq 0$, ou $A'\neq 0$, ou $B'\neq 0$ ou $C'\neq 0$. As equações "$Ax+By+Cz+D=0$" e "$A'x+B'y+C'z+D'=0$" determinam o mesmo plano π se, e somente se, existe $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tal que $A'=\lambda A$, $B'=\lambda B$, $C'=\lambda C$ e $D'=\lambda D$.*

Demonstração. Sejam $\vec{n_1}=(A,B,C)$ e $\vec{n_2}=(A',B',C')$.

Suponhamos que "$Ax+By+Cz+D=0$" e "$A'x+B'y+C'z+D'=0$" determinem o mesmo plano π. Pelo teorema anterior, $\vec{n_1}//\vec{n_2}$ e existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\vec{n_2}=\lambda\vec{n_1}$. Portanto $A'=\lambda A$, $B'=\lambda B$ e $C'=\lambda C$. Como ambos os vetores são não nulos, $\lambda\neq 0$. Como $\left(-\frac{AD}{\|\vec{n_1}\|^2},-\frac{BD}{\|\vec{n_1}^2\|},-\frac{CD}{\|\vec{n_1}^2\|}\right)\in\pi$,

$$0 = A'\left(-\frac{AD}{\|\vec{n_1}\|^2}\right) + B'\left(-\frac{BD}{\|\vec{n_1}\|^2}\right) + C'\left(-\frac{CD}{\|\vec{n_1}\|^2}\right) + D' = D' - \frac{(\lambda A)AD+(\lambda B)BD+(\lambda C)CD}{\|\vec{n_1}\|^2} = D' - \frac{\lambda(A^2+B^2+C^2)D}{\|\vec{n_1}\|^2} = D' - \lambda D\ .$$

Ou seja, $D' = \lambda D$.

Suponhamos que $A' = \mu A$, $B' = \mu B$, $C' = \mu C$ e $D' = \mu D$, para $\mu \in \mathbb{R}^*$. Logo

$$A'x + B'y + C'z + D' = \mu\big(Ax + By + Cz + D\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0\ .$$

Sendo assim, as duas equações determinam o mesmo plano. □

Exercício 41. *Mostre que as retas r e s determinam um plano π e obtenha uma equação geral de π.*

(1) $r\colon x-1 = y = 2z$ *e* $s\colon x-1 = y = z$ *(2)* $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$ *e* $s\colon \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{4}$

Proposição 8. *Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$, $Q = (x_1, y_1, z_1)$ e $R = (x_2, y_2, z_2)$, pontos não alinhados, e π o plano determinado por P, Q e R. Para $X = (x, y, z)$,*

$$X \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Demonstração. É imediato do fato que $X \in \pi$ se, e somente se, X, P, Q e R são coplanares. □

Proposição 9. *Sejam $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ um ponto e $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$ um plano. Se $\vec{n} = (a, b, c)$ e $A \in \pi$, então $Q = P + \mathrm{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PA}$ é o ponto de π mais próximo de P e a distância de P ao plano π é*

$$d(P, \pi) = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ .$$

Demonstração. Seja $(\vec{u}, \vec{v})$ um par de vetores diretores de π. Naturalmente $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ é base para $\mathbb{V}^3$. Temos que $\overrightarrow{QA}$ e $\overrightarrow{AQ}$ são ortogonais a $\vec{n}$. Logo $\overrightarrow{AQ} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $Q = A + \overrightarrow{AQ} \in \pi$. Tomemos $X \in \pi$. Logo $\overrightarrow{QX}//\pi$ e $\overrightarrow{QX} \perp \overrightarrow{PQ}$. Sendo assim

$$\|\overrightarrow{PX}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QX}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QX}\|^2 \geq \|\overrightarrow{PQ}\|^2\ ,$$

e, consequentemente, $\|\overrightarrow{PX}\| \geq \|\overrightarrow{PQ}\|$ e, de fato, Q é o ponto de π mais próximo de P.

A distância de P ao plano π é

$$d(P, \pi) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\mathrm{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PA}\| = \frac{\left|\overrightarrow{PA} \bullet \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}\ .$$

Suponhamos $A = (x_0, y_0, z_0)$. Daí $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ e

$$\overrightarrow{AP} \bullet \vec{n} = (\alpha - x_0, \beta - y_0, \gamma - z_0) \bullet (a, b, c) = a(\alpha - x_0) + b(\beta - y_0) + c(\gamma - z) = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\ .$$

Logo $d(P, \pi) = \frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. □

Exercício 42. *Sejam $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$ e $\sigma\colon ax + by + cz + e = 0$. Mostre que $d(X, \sigma) = d(Y, \sigma)$, para quaisquer $X, Y \in \pi$. Determine fórmula para a distância entre π e σ.*

Exercício 43. *Nas mesmas condições da proposição anterior, mostre que, se $B \in \pi$, então $P + \mathrm{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PB} = Q$.*

Exercício 44. *Calcule a distância do ponto $P = (1, 2, -1)$ ao plano $\pi\colon 3x - 4y - 5z + 1 = 0$.*

Exercício 45. *Calcule a distância de $P = (1, 3, -4)$ ao plano*

$$\pi\colon X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(-1, 0, 3)(\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Exercício 46. *Sejam P um ponto e π o plano que passa por A e é ortogonal ao vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$. Seja R o ponto simétrico ao P com relação ao plano π.*

(1) Determine fórmula vetorial para determinar R.

(2) Se $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$ e $P = (\alpha, \beta, \gamma)$, determine fórmula para R.

Exercício 47. *Determine o ponto simétrico a $P = (1, -2, 0)$ com relação ao plano $\pi\colon 4x - 4y - 2z = 3$.*

Exercício 48. *Sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ dois pontos distintos. Mostre que os pontos que equidistam de A e B determinam um plano. Determine características deste plano em função de A e B.*

Lema 10. *Sejam σ o plano que passa por A e é ortogonal ao vetor $\vec{n} \neq \vec{0}$ e r a reta que também passa por A e é paralela ao vetor $\vec{w} \neq \vec{0}$. Se $\vec{w} \not\parallel \vec{n}$, então o vetor $\vec{u} = \vec{w} - \operatorname{proj}_{\vec{n}}\vec{w} \neq \vec{0}$. Se s é a reta que passa por A e paralela ao vetor $\vec{u}$, então $s \subseteq \sigma$. Ainda, para todo $\vec{t} // \sigma$, $\operatorname{ang}(\vec{t}, \vec{w}) \geq \operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{w})$.*

Demonstração. Se $\vec{u} = \vec{w} - \operatorname{proj}_{\vec{n}}\vec{w} = \vec{0}$, então $\vec{w} // \vec{n}$, o que não acontece. Seja $\vec{v} = \vec{n} \wedge \vec{u}$. Logo $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{v})$ é base ortogonal para $\mathbb{V}^3$ pois $\vec{u} \perp \vec{n}$. Ainda $(\vec{u}, \vec{v})$ é par de vetores diretores para σ. Naturalmente $s \subseteq \sigma$.

Seja $\theta = \operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{w})$. Daí

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{w}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\vec{u} \bullet \left(\vec{u} + \operatorname{proj}_{\vec{n}}\vec{w}\right)}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{w}\|} ,$$

lembrando que $\operatorname{proj}_{\vec{n}}\vec{w} // \vec{n}$ e $\vec{n} \perp \vec{u}$. Concluímos que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ pois $\cos\theta > 0$.

Sejam $\vec{t} // \pi$, não nulo, e $\varphi = \operatorname{ang}(\vec{t}, \vec{w})$. Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Visto que $\vec{u} \perp \vec{v}$,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{t} \bullet \vec{w}}{\|\vec{t}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u} + \operatorname{proj}_{\vec{n}}\vec{w}\right)}{\|\vec{t}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\alpha\,\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{t}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\alpha\,\|\vec{u}\|}{\|\vec{t}\|}\cos\theta ,$$

pois $\vec{u}$, $\operatorname{proj}_{\vec{n}}\vec{w}$ e $\vec{v}$ são 2 a 2 perpendiculares. Observamos que

$$\|\vec{t}\| = \sqrt{\alpha^2\,\|\vec{u}\|^2 + \beta^2\,\|\vec{v}\|^2} \geq \sqrt{\alpha^2\,\|\vec{u}\|^2} = |\alpha|\,\|\vec{u}\| .$$

Logo $\frac{|\alpha|\|\vec{u}\|}{\|\vec{t}\|} \leq 1$ e $\cos\varphi \leq |\cos\varphi| \leq \cos\theta$. Concluímos que $\varphi \geq \theta$, já que a função cosseno é decrescente no intervalo $[0, \pi]$. □

Proposição 11. *Sejam σ um plano ortogonal ao vetor $\vec{n} \neq \vec{0}$ e r uma reta paralela ao vetor $\vec{w} \neq \vec{0}$. Se $r \cap \sigma \neq \emptyset$, então os menores ângulos entre r e σ medem $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que*

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{n} \bullet \vec{w}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{w}\|} .$$

Demonstração. Se $\vec{n} // \vec{w}$, então $r \perp \sigma$ e **todos** os ângulos entre r e σ são retos. Logo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = 1$. Por outro lado, de acordo com Cauchy-Schwarz, $|\vec{n} \bullet \vec{w}| = \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{w}\|$. Sendo assim, vale a tese do corolário.

Suponhamos que $\vec{n} \not\parallel \vec{w}$. Pela proposição anterior, $\vec{u} = \vec{w} - \operatorname{proj}_{\vec{n}}\vec{w} \neq \vec{0}$ e $\theta = \operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{w})$. Uma vez que $\cos\theta = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{w}\|}$, chegamos que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Visto que $\vec{u} \perp \vec{n}$, $\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\operatorname{proj}_{\vec{n}}\vec{w}\|^2$. Consequentemente

$$\|\vec{w}\|^2 = \cos^2\theta\,\|\vec{w}\|^2 + \frac{|\vec{w} \bullet \vec{n}|^2}{\|\vec{n}\|^2} ,$$

ou seja, $\frac{|\vec{w} \bullet \vec{n}|^2}{\|\vec{n}\|^2} = \|\vec{w}\|^2 - \cos^2\theta\,\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{w}\|^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta$. Sendo assim, $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{|\vec{w} \bullet \vec{n}|^2}{\|\vec{w}\|^2 \cdot \|\vec{n}\|^2}$ e segue a tese da proposição também neste caso. □

Exercício 49. *Calcule a medida do ângulo θ entre $r\colon \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$, e $\pi\colon y + z - 10 = 0$.*

Proposição 12. *Sejam $\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$ um plano e r a reta que passa pelo ponto P e é paralela ao vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$. Seja $\vec{n} = (A, B, C)$.*

(1) Se $\vec{n}$ não é perpendicular a $\vec{v}$, então $\pi \cap r$ é conjunto unitário.
(2) Se $\vec{n} \perp \vec{v}$ e $P \in \pi$, então $r \subseteq \pi$.
(3) Se $\vec{n} \perp \vec{v}$ e $P \notin \pi$, então $\pi \cap r = \emptyset$.

De fato, em cada um dos itens, vale a equivalência.

Demonstração. Sejam $P = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{v} = (\rho, \sigma, \tau)$ e $\mu = A\alpha + B\beta + C\gamma + D$. Observamos que, para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P + \lambda\vec{v} \in \pi \Leftrightarrow A(\alpha + \rho\lambda) + B(\beta + \sigma\lambda) + C(\gamma + \tau\lambda) + D = 0 \Leftrightarrow (A\rho + B\sigma + C\tau)\lambda + \mu = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(\vec{n} \bullet \vec{v}\big)\lambda + \mu = 0 \ .$$

(1) Suponhamos que $\vec{n} \bullet \vec{v} \neq 0$. Logo a equação "$\big(\vec{n} \bullet \vec{v}\big)\lambda + \mu = 0$" admite uma única solução, ou seja, $\pi \cap r$ é conjunto únitário.
(2) Se $\vec{n} \perp \vec{v}$ e $P \in \pi$, então $\vec{n} \bullet \vec{v} = 0 = \mu$ e consequentemente, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $P + \lambda\vec{v} \in \pi$. Neste caso, $r \subseteq \pi$.
(3) Se $\vec{n} \perp \vec{v}$ e $P \notin \pi$, então $\vec{n} \bullet \vec{v} = 0 \neq \mu$. Neste caso, **não** existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P + \lambda\vec{v} \in \pi$, ou seja, $\pi \cap r = \emptyset$.

Em cada item vale a equivalência pois há somente três possibilidades mutualmente exclusivas entre plano e reta: "$\pi \cap r$ é unitário" ou "$r \subseteq \pi$" ou "$\pi \cap r = \emptyset$". □

Exercício 50. *Estude a posição relativa entre r e π.*

(1) $r\colon X = (1,1,1) + \lambda(3,2,1)$ *e* $\pi\colon X = (1,1,3) + \mu(1,-1,1) + \nu(0,1,3)$
(2) $r\colon X = (2,2,1) + \lambda(3,3,0)$ *e* $\pi\colon X = (1,0,1) + \mu(1,1,1) + \nu(0,0,3)$
(3) $r\colon x - 2y = 3 - 2z + y = 2x - z$ *e* $\pi\colon X = (1,4,0,) + \mu(1,1,1) + \nu(2,1,0)$
(4) $r\colon X = (1,1,0) + \lambda(0,1,1)$ *e* $\pi\colon x - y - z = 2$
(5) $r\colon \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z+3}{3}$ *e* $\pi\colon 3x - 6y - z = 0$

Exercício 51. *Nos casos onde houver intersecção não vazia entre r e π, determine o(s) ponto(s) na intersecção para os casos no exercício anterior.*

Exercício 52. *Um cubo tem diagonal $\overline{AB}$ e uma das faces está contida no plano $\pi\colon x - y = 0$. Sabendo que $A = (1,1,0)$ e $B = (1,3,\sqrt{2})$, determine os demais vértices.*

Exercício 53. *Uma pirâmide tem por base um retângulo $ABCD$ e seu vértice $P = (1,1,1)$ projeta-se ortogonalmente sobre o centro da base. A face ΔPAB está contida em $\pi_1\colon x - y + z = 0$ e a face ΔPCD, em $\pi_2\colon x + y + z - 3 = 0$. Determine B, C e D, sabendo que $A = (1,0,0)$ e que o ponto $Q = (1,-1,0)$ pertence ao plano da base.*

CÔNICAS

MARCELO DIAS PASSOS

Resumo. Estas notas foram digitadas durante os cursos de MATB34 (Geometria Analítica e Álgebra Vetorial) em 2021 e 2022 (semestres 2021.1 a 2022.1).

Voltando à Geometria Analítica no Plano, ou seja, **com duas coordenadas**, vimos que as equações de 1º.grau correspondem às retas. Queremos investigar quais e como são as figuras que têm equação da forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Se $a = 0 = b = c$, caímos no caso de 1º.grau, o qual já foi estudado. Portanto, vamos supor que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Qualquer conjunto de pontos que satisfaça algum tipo de equação será chamado de **curva** e qualquer curva associada a alguma equação como a citada acima será chamada de **cônica**. Quando a cônica Γ for definida pela equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, escreveremos

$$\Gamma\colon ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Os termos "ax^2", "bxy" e "cy^2" são os termos de 2º.grau (ou de grau **2**), "dx" e "ey" são os termos de 1º.grau (ou de grau **1**), enquanto "f" é o termo indepedente. O termo "bxy" é chamado de termo **misto**.

Chamamos atenção para o fato que a equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ pode ser escrita matricialmente como

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Ou ainda, por

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \ .$$

A matriz (simétrica) $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$ é chamada **matriz associada ao polinômio "$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$"**. A matriz $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ e o seu determinante (i.e. $ac - \frac{b^2}{4}$) também merecem destaque.

Exemplo 1. *Algumas exemplos de "cônicas":*

(1) *o conjunto unitário* $\{(0,0)\}$*, que pode ser representado por* $x^2 + y^2 = 0$.
(2) *a reta* $x + y = 1$*, que pode ser representado por* $(x + y - 1)^2 = x^2 + 2xy + y - 2x - 2y + 1 = 0$.
(3) *a união das retas concorrentes* $x + y = 0$ *e* $x - y = 0$*, que pode ser representado por* $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = 0$.
(4) *a união das retas paralelas* $x + y = 0$ *e* $x + y - 1 = 0$*, que pode ser representado por* $(x + y)(x + y - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0$.
(5) *o conjunto vazio, que pode ser representado pela equação* $4x^2 + 23y^2 + 100 = 0$

Date: 2022.

Mas quanto a $x^2 - 4y^2 = 1$? Qual cônica é essa? Qual curva é ela? Vamos estudar todas as possibilidades para as equações de 2º.grau nas duas variáveis. Primeira estudaremos algumas curvas para construirmos suas equações. Num segundo momento vamos aprender a identificar a curva quando nos é dada uma equação de 2º.grau.

1. Mudanças no sistema de coordenadas

Quando tomamos uma cônica $\Gamma\colon ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, a existência de "zeros" vai facilitar sua identificação. Por exemplo, o termo misto será um dos fatores que mais dificultam o reconhecimento da cônica. Portanto mudanças no sistema de coordenadas são ferramentas importantes para reescrever Γ num novo sistema no qual tenhamos mais coeficientes nulos.

Quando efetuamos tais mudanças um cuidado é essencial: **não se pode mudar a geometria do plano!** E o que isto significa? Significa que distâncias devem ser mantidas, assim como medidas de ângulos! Veremos no decorrer deste texto que as cônicas são definidas conforme condições envolvendo distância a um ponto, distâncias a dois pontos e até distância a uma reta. Dado que esses cálculos são determinados pelas *coordenadas* dos pontos, devemos ter o cuidado que as distâncias continuem as mesmas ainda depois da mudança de coordenadas. Esse cuidado vai garantir que as condições que definiram a cônica mantenham-se exatamente as mesmas, o qual vai facilitar a determinação da cônica e dos seus parâmetros. Duas serão as mudanças que usaremos e que garantem não mudança na geometria: as **translações** e as **rotações**.

2. Translação

Temos uma **Translação** quando mudamos a origem do sistema mas mantemos sua base.

Proposição 1. *Sejam Σ e Σ' sistemas de coordenadas de mesma base e origens O e O', respectivamente. Se $O' = (h,k)_\Sigma$, então*

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases} ,$$

para todo $X = (u,v)_{\Sigma'} = (x,y)_\Sigma$.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ a base que os dois sistemas compartilham. Fixemos $X = (u,v)_{\Sigma'} = (x,y)_\Sigma$. Daí $\overrightarrow{OX} = (x,y)_\mathcal{B}$ e $\overrightarrow{O'X} = (u,v)_\mathcal{B}$. Como $\overrightarrow{OO'} = (h,k)_\mathcal{B}$, induzimos que

$$(x,y)_\mathcal{B} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X} = (h,k)_\mathcal{B} + (u,v)_\mathcal{B} ,$$

e consequentemente, $x = u+h$ e $y = v+k$. □

Uma vez que a base foi mantida intacta na translação, as coordenadas dos vetores continuam as mesmas. Isso garante que medidas de ângulos e distâncias são as mesmas depois da translação.

Exercício 1. *Determine a nova equação das retas quando muda-se a origem para o ponto dado:*

(1) $x = 0$ *e* $(1,-1)$
(2) $y = 1$ *e* $(-\frac{1}{2}, 1)$
(3) $x + y = 1$ *e* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
(4) $2x - y - 3 = 0$ *e* $(-1,3)$
(5) $x = y$ *e* $(-1,2)$
(6) $x + y = 0$ *e* $(0,-4)$

Exercício 2. *Determine a antiga equação das retas quando mudou-se a origem para o ponto dado:*

(1) $u = 0$ *e* $(1,-1)$
(2) $v = 1$ *e* $(-\frac{1}{3}, 1)$
(3) $u + v = 2$ *e* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
(4) $2v - u - 3 = 0$ *e* $(-3,1)$
(5) $u + v = -1$ *e* $(1,-2)$
(6) $u + v = 0$ *e* $(4,0)$

Aplicando a translação da proposição anterior à equação $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, observamos que:

$$\begin{gathered} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad a(u+h)^2 + b(u+h)(v+k) + c(y+k)^2 + d(u+h) + e(v+k) + f = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f' = 0 , \end{gathered}$$

onde

$$\begin{gathered} a' = a, \quad b' = b, \quad c' = c, \\ d' = 2ah + bk + d, \quad e' = bh + 2ck + e \quad \text{e} \quad f' = ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f . \end{gathered}$$

Proposição 2. *Nas condições estudadas até o momento,* $\begin{vmatrix} a' & \frac{b'}{2} & \frac{d'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' & \frac{e'}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & f' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}$.

Demonstração. Tomando a terceira coluna menos h vezes a primeira coluna menos k vezes a segunda, deduzimos que

$$\begin{vmatrix} a' & \frac{b'}{2} & \frac{d'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' & \frac{e'}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & f' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & ah+\frac{bk}{2}+\frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{bh}{2}+ck+\frac{e}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & f' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & \alpha \end{vmatrix},$$

onde $\alpha = f' - \frac{d'h}{2} - \frac{e'k}{2}$. Por sua vez, tomando a terceira linha menos h vezes a primeira linha menos k vezes a segunda, concluímos que

$$\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ ah+\frac{bk}{2}+\frac{d}{2} & \frac{bh}{2}+ck+\frac{e}{2} & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & \beta \end{vmatrix},$$

onde $\beta = \alpha - \frac{dh}{2} - \frac{ek}{2} = f' - \frac{d'h}{2} - \frac{e'k}{2} - \frac{dh}{2} - \frac{ek}{2}$. Mas $f' = ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f$ e ainda

$$f' = \begin{pmatrix} h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ah+\frac{bk}{2}+\frac{d}{2} \\ \frac{bh}{2}+ck+\frac{e}{2} \\ \frac{dh}{2}+\frac{ek}{2}+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d'}{2} \\ \frac{e'}{2} \\ \frac{dh}{2}+\frac{ek}{2}+f \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{d'h}{2} + \frac{e'k}{2} + \frac{dh}{2} + \frac{ek}{2} + f\ .$$

Portanto $\beta = f$ e concluímos a tese. □

Uma primeira observação importante é que a translação **não** muda os coeficientes dos termos de 2º.grau e, sendo assim, não é indicada para eliminar o termo misto, por exemplo. Ainda, a translação "anula" o termo indepedente se, e somente se, (h,k) for elemento da cônica. Por fim, os termos de 1º.grau são eliminados se, e somente se,

$$\begin{cases} ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{e}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Se (h,k) é solução deste último sistema, então o termo indepedente da equação da cônica no sistema Σ', que é $f' = ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f$, pode ser calculado por:

$$f' = \begin{pmatrix} h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{dh+ek}{2}+f \end{pmatrix} = \frac{dh+ek}{2} + f = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ 1 \end{pmatrix},$$

Se o número $ac - \frac{b^2}{4} \neq 0$, então o sistema tem solução única. Caso $4ac = b^2$, este pode não ter solução ou ter infinitas soluções.

Exercício 3. *Ache translação que elimina os termos de 1º.grau para as seguintes equações de 2º.grau e apresente-as depois da translação:*

(1) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$
(2) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$
(3) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$
(4) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$
(5) $x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 31 = 0$
(6) $25x^2 - 4y^2 + 40y = 0$
(7) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$
(8) $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$
(9) $(x+1)(y-2) = 1$
(10) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$
(11) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$
(12) $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$

Exercício 4. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $4ac = b^2$. Mostre que:*

(1) $ax^2 + bxy + cy^2 = \frac{(2ax+by)^2}{4a}$, *se* $a \neq 0$.
(2) $ax^2 + bxy + cy^2 = \frac{(bx+2cy)^2}{4c}$, *se* $c \neq 0$.

Lema 3. *Sejam $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tais que $ac = \frac{b^2}{4}$. Então*

$$a \cdot \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{e}{2} \end{vmatrix}^2 \qquad e \qquad c \cdot \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ c & \frac{e}{2} \end{vmatrix}^2 .$$

Demonstração. Tomando a segunda linha menos $\frac{b}{2}$ vezes a primeira linha, concluímos que

$$a \cdot \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{ab}{2} & \frac{b^2}{4} & \frac{ae}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & \frac{ae}{2} - \frac{bd}{4} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = -\left(\frac{ae}{2} - \frac{bd}{4}\right) \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{e}{2} \end{vmatrix}^2 .$$

Analogamente demonstra-se a outra igualdade do enunciado do lema. □

Lema 4. *Sejam $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ onde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. O sistema linear $\begin{cases} ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2} = 0 \end{cases}$ (em (h, k)) admite infinitas soluções se, e somente se,* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = 0.$

Demonstração. Basta perceber que o citado sistema linear tem infinitas soluções se, e somente se, uma equação é múltiplo da outra. □

Teorema 5. *Seja $\Gamma \colon ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ uma cônica onde* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = 0$ *e $a \neq 0$. Seja $D = \begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix}$.*

(1) Se $D < 0$, então Γ representa a união de duas retas paralelas distintas.
(2) Se $D = 0$, então Γ representa uma reta.
(3) Se $D > 0$, então Γ representa o conjunto vazio.

Demonstração. Uma vez que $a \neq 0$, seja $\lambda = \frac{b}{2a}$. Daí $b = 2a\lambda$ e $c = a\lambda^2$. Pelo lema 3, segue que $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{e}{2} \end{vmatrix} = 0$ e $e = \lambda d$. Portanto

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = ax^2 + 2a\lambda xy + a\lambda^2 y^2 + dx + \lambda dy + f = a(x + \lambda y)^2 + d(x + \lambda y) + f .$$

O discriminante da equação de 2º.grau $au^2 + du + f = 0$ (em u) é $-4D$. Sendo assim:
(1) Se $D < 0$, sejam u_1 e u_2 as raízes distintas da equação $au^2 + du + f = 0$. Neste caso,

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \lambda y = u_1 \text{ ou } x + \lambda y = u_2 ,$$

o que corresponde à união de duas retas paralelas distintas.
(2) Se $D = 0$, seja u_0 a solução (única) da equação $au^2 + du + f = 0$. Neste caso,

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \lambda y = u_0 ,$$

o que corresponde a uma reta.
(3) Se $D > 0$, então a equação $au^2 + du + f = 0$ não admite solução. Neste caso, não há pontos do plano que satisfazem "$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$" e esta representa o conjunto vazio. □

Exercício 5. *Seja $\Gamma \colon ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ uma cônica onde* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = 0$ *e $c \neq 0$. Seja $C = \begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}$. Mostre que:*

(1) Se $C < 0$, então Γ representa a união de duas retas paralelas distintas.
(2) Se $C = 0$, então Γ representa uma reta.

(3) Se $C > 0$, então Γ representa o conjunto vazio.

Exercício 6. *As cônicas abaixo determinam retas paralelas ou o conjunto vazio. Determine qual é a situação de cada e, nos casos de retas, determine as retas que são representadas.*

(1) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
(2) $4x^2 + 28xy + 49y^2 - 2x - 7y = 0$
(3) $3x^2 + 12xy + 12y^2 - 2x - 4y + 9 = 0$
(4) $7x^2 + 28xy + 28y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$
(5) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 12y + 4 = 0$
(6) $4x^2 - 4xy + y^2 - 16\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y + 81 = 0$

Exercício 7. *Determine condição sobre $k \in \mathbb{R}$ tal que a cônica dada por $x^2-6xy+9y^2-4x+12y+k = 0$* ***não seja vazia****.*

3. Rotação

Uma **Rotação** é uma mudança no sistema de coordenadas que mantém a origem do sistema e a faz seguinte mudança na base: se $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ é base ortonormal inicial, então $\mathcal{C} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ é a nova base, onde $f_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)_{\mathcal{B}}$ e $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{f_1}^{\perp} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)_{\mathcal{B}}$, para $\theta \in \mathbb{R}$. Se O é um ponto e os sistemas são $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ e $\Sigma' = (O, \mathcal{C})$, para todo $X = (u, v)_{\Sigma'} = (x, y)_{\Sigma}$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

pois

$$\overrightarrow{OX} = u\overrightarrow{f_1} + v\overrightarrow{f_2} = u(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)_{\mathcal{B}} + v(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)_{\mathcal{B}} = \Big((\cos\theta)u - (\operatorname{sen}\theta)v, (\operatorname{sen}\theta)u + (\cos\theta)v\Big)_{\mathcal{B}} .$$

É importante notar que $\mathcal{C}$ é base ortonormal e, se $\vec{v} = (u, v)_{\mathcal{C}} = (x, y)_{\mathcal{B}}$, então

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \big((\cos\theta)u - (\operatorname{sen}\theta)v\big)^2 + \big((\operatorname{sen}\theta)u + (\cos\theta)v\big)^2 = \\ &= (\cos^2\theta)u^2 - 2(\cos\theta\operatorname{sen}\theta)uv + (\operatorname{sen}^2\theta)v^2 + (\operatorname{sen}^2\theta)u^2 + 2(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)uv + (\cos^2\theta)v^2 = \\ &= u^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + v^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = u^2 + v^2 . \end{aligned}$$

Portanto normas de vetores são mantidas e consequentemente produtos escalares entre vetores serão mantidos. Isso garante que medidas de ângulos e distâncias são mantidas depois da rotação.

A matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ será chamada de **matriz da rotação** θ.

Exercício 8. *Mostre que, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, a matriz da rotação θ é inversível e sua inversa coincide com sua transposta.*

Portanto, pelo exercício acima,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Exercício 9. *Determine a nova equação das retas quando aplica-se a rotação dada:*

(1) $x = 0$ *e* $\theta = \frac{\pi}{4}$
(2) $y = 1$ *e* $\theta = -\frac{\pi}{2}$
(3) $x + y = 1$ *e* $\theta = \frac{\pi}{3}$
(4) $2x - y - 3 = 0$ *e* $\theta = \pi$
(5) $x = y$ *e* $\theta = \frac{3\pi}{4}$
(6) $x + y = 0$ *e* $\theta = \arccos\frac{1}{5}$

Exercício 10. *Determine a antiga equação das retas quando rotacionou-se pelo valor dado:*

(1) $u = 0$ *e* $\theta = \frac{\pi}{2}$
(2) $v = 1$ *e* $\theta = -\frac{\pi}{2}$
(3) $u + v = 2$ *e* $\theta = \frac{\pi}{4}$
(4) $2v - u - 3 = 0$ *e* $\theta = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$
(5) $u + v = 1$ *e* $\theta = \frac{3\pi}{4}$
(6) $u + v = 0$ *e* $\theta = -\pi$

Proposição 6. *Seja $s\colon ax + by + c = 0$ uma reta. Existe rotação tal que s é vertical no novo sistema de coordenadas.*

Demonstração. Seja $\vec{n} = (a, b)$ que sabemos ser não nulo. Sejam $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos\theta = \frac{a}{r}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}$. Tomemos a rotação por θ. Daí

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow r\cos\theta(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta) + r\operatorname{sen}\theta(u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta) + c = 0 \Leftrightarrow ru + c = 0 .$$

Portanto $s\colon u + \frac{c}{r} = 0$, que é reta vertical no novo sistema de coordenadas. □

Exercício 11. *Mostre resultado análogo ao da proposição para ser horizontal.*

Aplicando uma rotação à equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, observamos que:

$$\begin{gathered} a(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta)^2 + b(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta)(u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta) + c(u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta)^2 + \\ + d(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta) + e(u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta) + f = 0 \\ \Leftrightarrow \quad a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f' = 0, \end{gathered}$$

onde

$$\begin{gathered} a' = a(\cos^2\theta) + b(\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + c(\operatorname{sen}^2\theta), \\ b' = b\cos(2\theta) - (a-c)\operatorname{sen}(2\theta) \\ c' = a(\operatorname{sen}^2\theta) - b(\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + c(\cos^2\theta) \\ d' = d(\cos\theta) + e(\operatorname{sen}\theta, \\ e' = -d(\operatorname{sen}\theta) + e(\cos\theta) \quad \text{e} \\ f' = f\ . \end{gathered}$$

Essas mesmas igualdades também podem ser estabelecidas quando lembramos que

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + f = 0.$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Exercício 12. *Mostre que $a' - c' = b' = 0$ se, e somente se, $a - c = b = 0$.*

Proposição 7. *Nas condições estudadas até o momento, $a' + c' = a + c$ e $a'c' - \frac{(b')^2}{4} = ac - \frac{b^2}{4}$.*

Demonstração. Observamos que

$$\begin{aligned} a' + c' &= \Big(a(\cos^2\theta) + b(\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + c(\operatorname{sen}^2\theta)\Big) + \Big(a(\operatorname{sen}^2\theta) - b(\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + c(\cos^2\theta)\Big) = \\ &= a(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + c(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = a + c. \end{aligned}$$

enquanto

$$a'c' - \frac{(b')^2}{4} = \det \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = ac - \frac{b^2}{4}.$$

□

Proposição 8. *Nas condições estudadas até o momento,* $\begin{vmatrix} a' & \frac{b'}{2} & \frac{d'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' & \frac{e'}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & f' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}$.

Demonstração. Mostra-se que

$$\begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} & \frac{d'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' & \frac{e'}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dado que $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ têm determinante 1, segue a tese. □

Conforme já mencionado, o termo misto é aquele que mais dificulta o reconhecimento da cônica. A rotação dá possibilidade de eliminarmos o termo misto de $a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f' = 0$. E para tanto, $b' = 0$ se, e somente se,

$$(a - c) \cdot \operatorname{sen}(2\theta) = b \cdot \cos(2\theta)\ .$$

Proposição 9. *Existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $(a-c)\cdot \operatorname{sen}(2\theta) = b \cdot \cos(2\theta)$.*

Demonstração. Se $a = c$, basta tomar $\theta = \frac{\pi}{4}$. Suponhamos $a \neq c$ e seja $\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a-c}\right)$. Portanto $\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{b}{a-c}$ e $(a-c)\operatorname{sen}(2\theta) = b\cos(2\theta)$. □

Teorema 10. *Se $b \neq 0$ e $(a-c)\operatorname{sen}(2\theta) = b \cdot \cos(2\theta)$, então $a' \neq c'$ e a' e c' são raízes do polinômio $p(t) = \begin{vmatrix} a-t & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c-t \end{vmatrix}$.*

Demonstração. Suponhamos que $b \neq 0$ e $(a-c)\operatorname{sen}(2\theta) = b \cdot \cos(2\theta)$. Daí $b' = 0$ e, pelo exercício 12, $a' \neq c'$. Pelo lema 7, $a' + c' = a + c$ e $a'c' = ac - \frac{b^2}{4}$. Logo

$$p(t) = \begin{vmatrix} a-t & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c-t \end{vmatrix} = (t-a)(t-c) - \frac{b^2}{4} = t^2 - (a+c)t + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right) = t^2 - (a'+c')t + a'c' = (t-a')(t-c')\,,$$

que tem exatamente a' e c' como raízes. □

Se $M = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ e I é a matriz identidade 2×2, então o polinômio citado no teorema é

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} a-t & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c-t \end{pmatrix} = \det(M - tI)\ .$$

Corolário 1. *Nas mesmas condições do teorema anterior, $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ resolve o sistema*

$$\begin{pmatrix} a-a' & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c-a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

enquanto $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ resolve o sistema

$$\begin{pmatrix} a-c' & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c-c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\ .$$

Sendo assim,

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}\ .$$

Concluímos que

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = a'\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a-a' & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c-a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Analogamente, concluímos que $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ resolve o sistema $\begin{pmatrix} a-c' & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c-c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. □

Lema 11. *Sejam N uma matriz 2×2 simétrica e $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se $\lambda \neq \mu$, $N\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e $N\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$, então $(\alpha, \beta) \perp (\gamma, \delta)$.*

Demonstração. Seja $N = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$ e suponhamos $\begin{cases} p\alpha + q\beta = \lambda\alpha \\ q\alpha + r\beta = \lambda\beta \\ p\gamma + q\delta = \mu\gamma \\ q\gamma + r\delta = \mu\delta \end{cases}$. Sejam $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ e $\vec{v} = (\gamma, \delta)$. Logo

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{u} \bullet \vec{v}) &= (\lambda\vec{u}) \bullet \vec{v} = (p\alpha + q\beta, q\alpha + r\beta) \bullet \vec{v} = (p\alpha + q\beta)\gamma + (q\alpha + r\beta)\delta = \\ &= \alpha(p\gamma + q\delta) + \beta(q\gamma + r\delta) = \vec{u} \bullet (p\gamma + q\delta, q\gamma + r\delta) = \vec{u} \bullet (\mu\vec{v}) = \mu(\vec{u} \bullet \vec{v}). \end{aligned}$$

Se $\lambda \neq \mu$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$. □

Lema 12. *Nas mesmas condições do teorema 10, se* $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = a'\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, *então* $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = c'\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Demonstração. Seja $M = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$. Pelo corolário 1, $M\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = c'\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$. Se $M\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = a'\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, então $(\alpha, \beta) \perp (-\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, pelo lema anterior e dado que $a' \neq c'$. Portanto, $(-\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $(-\beta, \alpha)$ são paralelos e existe $\nu \in \mathbb{R}$ tal que $(-\beta, \alpha) = \nu(-\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Logo $N\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = c'\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$. □

Exercício 13. *Ache rotação que elimina o termo misto para as seguintes equações de 2º.grau e apresente-as depois da rotação:*

(1) $4x^2 - 4xy + 7y^2 - 24 = 0$
(2) $xy = 1$
(3) $3x^2 + 3xy + 3y^2 - 4 = 0$
(4) $7x^2 + 6xy - y^2 = 0$
(5) $5x^2 + 2y^2 + 2xy + 2 = 0$
(6) $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$
(7) $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$
(8) $8x^2 + 6xy - 9 = 0$
(9) $x^2 + 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y = 0$
(10) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$
(11) $4x^2 + 28xy + 49y^2 - \frac{1}{4} = 0$
(12) $y^2 - 2xy + x^2 + 16x + 16y = 0$

4. Parábolas

Fixemos uma reta r e ponto $F \notin r$. A **párabola de foco** F **e diretriz** r é a curva determinada pelos pontos que equidistam de F e de r. Sendo assim, se Γ é parábola determinada pela diretriz r e foco F, então, para um ponto X,

$$X \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad d(X, F) = d(X, r)\ .$$

Sejam H o ponto de r mais próximo de F e V o ponto médio do segmento $\overline{FH}$. Naturalmente $d(V, F) = d(V, H)$. Como $\overrightarrow{HV} \perp r$ e $H \in r$, deduzimos que $d(V, r) = d(V, H)$. Sendo assim, $d(V, F) = d(V, r)$, ou seja, V é ponto da parábola. Esse ponto é chamado de **vértice** da parábola.

Definição 1. *Seja* Γ *uma parábola de foco* F *e vértice* V*. A reta* $\overleftrightarrow{VF}$ *é chamada de* ***reta focal de*** Γ.

Além disto, a reta focal é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz.

Se $F = (\alpha, \beta)$ e $r\colon Ax + By + C = 0$, onde $A^2 + B^2 \neq 0$, então, para $X = (x, y)$,

$$X \in \Gamma \Leftrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \tfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \Leftrightarrow (A^2+B^2)\big((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\big) = (Ax+By+C)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A^2+B^2)(x^2 - 2\alpha + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2) = A^2x^2 + B^2y^2 + C^2 + 2ABxy + 2ACx + 2BCy \Leftrightarrow$$
$$B^2x^2 - 2ABxy + A^2y^2 - 2\Big(\alpha(A^2+B^2) + AC\Big)x - 2\Big(\beta(A^2+B^2) + BC\Big)y + \Big((A^2+B^2)(\alpha^2+\beta^2) - C^2\Big) = 0.$$

Teorema 13. *Toda parábola admite equação* $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$*, onde* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = 0$ *e* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \neq 0$.

Demonstração. Tomemos a equação desenvolvida nos parágrafos acima e sejam $a = B^2, b = -2AB, c = A^2, d = -2\Big(\alpha(A^2+B^2) + AC\Big), e = -2\Big(\beta(A^2+B^2) + BC\Big)$ e $f = \Big((A^2+B^2)(\alpha^2+\beta^2) - C^2\Big)$. O número $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B^2 & -AB \\ -AB & A^2 \end{vmatrix}$ é nulo. Seja $D = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}$. Pelo lema 3,

$$B^2D=-\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{e}{2}\end{vmatrix}^2=-\begin{vmatrix} B^2 & -\alpha(A^2+B^2)-AC \\ -AB & -\beta(A^2+B^2)-BC\end{vmatrix}^2=-B^2\begin{vmatrix} B & \alpha(A^2+B^2)+AC \\ -A & \beta(A^2+B^2)+BC\end{vmatrix}^2=$$
$$=-B^2\left(B(\beta(A^2+B^2)+BC)+A(\alpha(A^2+B^2)+AC)\right)^2=-B^2(A^2+B^2)^2(A\alpha+B\beta+C)^2\ .$$

Analogamente, mostra-se que $A^2D=-A^2(A^2+B^2)^2(A\alpha+B\beta+C)^2$. Dado que $A^2+B^2\neq 0$, deduzimos que $D=-(A^2+B^2)^2(A\alpha+B\beta+C)^2$. Como $F\notin r$, $A\alpha+B\beta+C\neq 0$ e completamos a tese do teorema. □

Vale notar que $B^2x^2-2ABxy+A^2y^2=(Bx-Ay)^2$ e que $B(x-\alpha)-A(y-\beta)=0$ é equação da reta que passa pelo ponto F e é perpendicular à reta r, ou seja, a reta focal. Ainda, o coeficente do termo misto é 0 se, e somente se, $A=0$ ou $B=0$, ou equivalentemente, a reta diretriz for **paralela a um dos eixos coordenados**. Mais precisamente:

(1) se r é horizontal (i.e. $A=0\neq B$), então Γ tem um único termo de 2º.grau, que é o termo com a primeira coordenada ao quadrado.

(2) se r é vertical (i.e. $A\neq 0=B$), então Γ tem um único termo de 2º.grau, que é o termo com a segunda coordenada ao quadrado.

Vamos estudar as parábolas que têm diretriz horizontal. Seja Γ a parábola de vértice $V=(h,k)$, diretriz r e foco F, onde $\overrightarrow{VF}=(0,p)\neq\vec{0}$. Daí $F=V+\overrightarrow{VF}=(h,k+p)$ e $H=V-\overrightarrow{VF}=(h,k-p)$. Como r deve passar por H e ser perpendicular a $\overrightarrow{VF}$, então $r\colon y-k+p=0$. Se Γ é a parábola de foco F e diretriz r,

$$X=(x,y)\in\Gamma\Leftrightarrow\sqrt{(x-h)^2+\left(y-(k+p)\right)^2}=|y-k+p|\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-h)^2+\left((y-k)-p\right)^2=\left((y-k)+p\right)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-h)^2+(y-k)^2-2p(y-k)+p^2=(y-k)^2+2p(y-k)+p^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4p(y-k)=(x-h)^2.$$

Se “abrimos” o quadrado, obtemos:

$$\Gamma\colon y=\frac{1}{4p}x^2-\frac{h}{2p}x+\frac{h^2}{4p}+k,$$

que é expressão conhecida desde o ensino médio.

Teorema 14. *Sejam $a,b,c\in\mathbb{R}$ onde $a\neq 0$. O conjunto dos pontos (x,y) do plano, que satisfazem a equação $y=ax^2+bx+c$, é uma parábola de vértice $V=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$, foco $F=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}+\frac{1}{4a}\right)$ e diretriz $r\colon y+\frac{\Delta}{4a}+\frac{1}{4a}=0$, onde $\Delta=b^2-4ac$*

Demonstração. Dado que $a\neq 0$,

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\ .$$

Logo

$$y=ax^2+bx+c\quad\Leftrightarrow\quad y+\frac{\Delta}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{a}\left(y+\frac{\Delta}{4a}\right)=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\ .$$

Sejam $h=-\frac{b}{2a}$, $k=-\frac{\Delta}{4a}$, $p=\frac{1}{4a}$, $V=(h,k)$, $F=(h,k+p)$, r a reta perpendicular ao vetor $(0,p)$ que passa por $(h,k-p)$ e Γ a parábola de foco F e diretriz r. Para $X=(x,y)$,

$$X\in\Gamma\quad\Leftrightarrow\quad 4p(y-k)=(x-h)^2\quad\Leftrightarrow\quad\tfrac{1}{a}\left(y+\tfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2\quad\Leftrightarrow\quad y=ax^2+bx+c\ .$$ □

Corolário 2. *Seja Γ uma parábola. Existe sistema de coordenadas (ortogonal) tal que, para algum $a\neq 0$, $\Gamma\colon y=ax^2$.*

Demonstração. Sejam F, V e r o foco, o vértice e a diretriz da Γ, respectivamente. Seja $\overrightarrow{f_1}$ um vetor unitário e diretor de r. O sistema de coordenadas $(V,\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_1}^{\perp})$ é ortogonal. Neste sistema $V=(0,0)$ e $\overrightarrow{VF}=(0,p)$, para algum $p\neq 0$. Se $a=\frac{1}{4p}$, então

$$X=(x,y)\in\Gamma\quad\Leftrightarrow\quad 4py=x^2\quad\Leftrightarrow\quad y=\tfrac{x^2}{4p}=ax^2\ .$$

□

Observamos que a demonstração do teorema anterior já nos dá um roteiro para conseguir os elementos que determinam a parábola:

(1) se a equação é da forma $y = ax^2 + bx + c$, então **a parábola tem diretriz horizontal**.
(2) tome a expressão $ax^2 + bx$ e a escreva como $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$.
(3) tome a expressão $x^2 + \frac{b}{a}x$ e some e substraia a ela algo para **completar um quadrado**, mais precisamente, some e subtraia $\frac{b^2}{4a^2}$ pois $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
(4) passe para o outro lado da igualdade tudo que "ficou de fora do quadrado perfeito".

Exemplo 2. *Como obter os elementos que determinaram a parábola* $\Gamma\colon y = x^2$*? Como determinar seu foco e a diretriz? Observamos que*

$$y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1(y-0) = (x-0)^2 \ .$$

Portanto, podemos tomar $h = 0$*,* $k = 0$ *e* $4p = 1$*. Obtemos que o vértice é* $V = (0,0)$*, enquanto* $\overrightarrow{VF} = \left(0, \frac{1}{4}\right)$*. Daí o foco é* $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$*. A diretriz é perpendicular a* $\overrightarrow{VF}$ *e e passa pelo ponto* $H = V - \overrightarrow{VF} = \left(0, -\frac{1}{4}\right)$*, ou seja, a diretriz é a reta de equação* $y = -\frac{1}{4}$*, que já sabíamos ser horizontal.*

Exercício 14. *Sejam* V *e* F *vértice e foco de uma parábola* Γ*. Suponha que* $V = (h,k)$ *e* $\overrightarrow{VF} = (p,0)$*, com* $p \neq 0$*. Mostre que* $\Gamma\colon 4p(x-h) = (y-k)^2$*.*

Exercício 15. *Determinar o vértice, o foco e uma equação da diretriz de cada uma das* ***parábolas****:*

(1) $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$
(2) $y = (x-1)(x+2)$
(3) $x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$
(4) $y^2 + 4y - 16x - 44 = 0$
(5) $y = \frac{x^2}{4} - 2x - 1$
(6) $x^2 - 12y + 72 = 0$
(7) $y = 4x - x^2$
(8) $-8x + y^2 - 6y + 17 = 0$
(9) $y - x^2 + 6x = 9$
(10) $y = x^2 + 4x + 6$
(11) $y = x^2 - 4x + 2$
(12) $x = y^2 - 6y + 8$
(13) $x = y^2 + y + 1$
(14) $x^2 - 6x - 5y + 14 = 0$
(15) $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$

Exercício 16. *Para cada item, determine uma equação da parábola a partir das informações dadas. Determine o foco, o vértice e a diretriz da parábola, nos casos onde não houver a informação.*

(1) foco $F = (3,4)$ *e diretriz* $d\colon x - 1 = 0$*.*
(2) foco $F = (-2,3)$ *e diretriz* $d\colon y + 6 = 0$*.*
(3) vértice $V = (1,2)$*, reta focal paralelo ao eixo das abscissas e* $P = (-1,6)$ *é ponto da parábola.*
(4) reta focal paralelo ao eixo das ordenadas e os pontos $P = (0,0)$*,* $Q = (1,-3)$ *e* $R = (-4,-8)$ *pertencem à parábola.*
(5) reta focal $f\colon y - 5 = 0$*, diretriz* $d\colon x - 3 = 0$ *e vértice sobre a reta* $r\colon y = 2x + 3$*.*

Proposição 15. *O ponto da parábola mais próxima da sua diretriz é seu vértice. Ainda, uma parábola não encontra sua diretriz.*

Demonstração. Sejam F, V e r o foco, o vértice e a diretriz de uma parábola, respectivamente. Fixemos um sistema de coordenadas cuja origem seja V e para o qual a r seja horizontal. Então $V = (0,0)$, $\overrightarrow{VF} = (0,p)$, para algum $p \neq 0$. Ainda $r\colon y + p = 0$, $\Gamma\colon 4py = x^2$ e $d(V,r) = |p|$. Se $X = (x,y) \in \Gamma$, então

$$d(X,r) = |y+p| = \left|\frac{x^2}{4p} + p\right| = \frac{x^2 + 4p^2}{4|p|} \geq \frac{4p^2}{4|p|} = |p| = d(V,r) \ .$$

Consequentemente, $\Gamma \cap r = \emptyset$. □

Fizemos o reconhecimento de parábolas com diretriz paralela a algum dos eixos coordenados. O teorema a seguir nos ajuda a reconhecer uma parábola qualquer.

Teorema 16. *Seja* $\Gamma\colon ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ *uma cônica onde* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = 0$ *e* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \neq 0$*.*
Então Γ *descreve uma* ***parábola****.*

Demonstração. Estudemos primeiro o caso no qual $a \neq 0$. Logo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = \tfrac{1}{4a}\left(4a^2x^2 + 4abxy + b^2y^2\right) + dx + ey + f = \tfrac{1}{4a}\left(2ax + by\right)^2 + dx + ey + f.$$

Seja $s = \sqrt{4a^2 + b^2}$, que necessariamente é não nulo. Neste caso usemos a rotação

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a}{s} & -\frac{b}{s} \\ \frac{b}{s} & \frac{2a}{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Logo

$$2ax + by = 2a\left(\tfrac{2au-bv}{s}\right) + b\left(\tfrac{bu+2av}{s}\right) = \tfrac{(4a^2+b^2)u}{s} = \tfrac{s^2u}{s} = su \qquad \text{e}$$

$$dx + ey = d\left(\tfrac{2au-bv}{s}\right) + e\left(\tfrac{bu+2av}{s}\right) = \tfrac{(2da+eb)u}{s} + \tfrac{(2ea-db)v}{s}.$$

Sendo assim, depois da rotação, Γ terá equação:

$$\frac{s^2u^2}{4a} + \frac{(2da+eb)u}{s} + \frac{(2ea-db)v}{s} + f = 0.$$

Dado que $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \neq 0$ e que $a \neq 0$, pelo lema 3, conclui-se que $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{e}{2} \end{vmatrix} = \frac{2ae-bd}{4} \neq 0$. Consequentemente, $2ea - db \neq 0$ e podemos escrever

$$\Gamma \colon v = \left(\frac{s^3}{4a(db-2ea)}\right)u^2 + \left(\frac{2da+eb}{db-2ea}\right)u + \frac{sf}{db-2ea}\ ,$$

que é equação de parábola com diretriz horizontal (no novo sistema), pelo teorema 14.

Caso $a = 0$, induzimos que $b = 0$ e $c \neq 0$. Por outro lado, $d \neq 0$ pois, pelo lema 3, $\begin{vmatrix} \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ c & \frac{e}{2} \end{vmatrix} = -\frac{cd}{4} \neq 0$. Neste caso,

$$\Gamma \colon y^2 = -\frac{d}{c}\left(x - \frac{e}{d}\right)\ ,$$

que é equação de parábola com diretriz vertical, pelo exercício 14. □

Corolário 3. *Seja* $\Gamma \colon ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ *uma cônica onde* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = 0$. *Então* Γ *descreve parábola, retas paralelas (coincidentes ou não) ou o conjunto vazio.*

Demonstração. Consequência imediata do teorema anterior e do teorema 5. □

É interessante notar que, nas condições do corolário anterior, $ax^2 + bxy + cy^2$ é múltiplo de um quadrado perfeito por causa do exercício 4. Pelo teorema anterior, esse quadrado perfeito já determina a primeira coluna da rotação que elimina o termo misto.

Exemplo 3. *A cônica* $\Gamma \colon 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 30x - 85y + 175 = 0$ *é uma parábola pois*

$$\begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 9 \cdot 16 - 144 = 0 \quad e \quad \begin{vmatrix} 9 & -12 & -15 \\ -12 & 16 & -\frac{85}{2} \\ -15 & -\frac{85}{2} & 175 \end{vmatrix} = -\frac{140625}{4}\ .$$

Ainda assim, essa informação prévia não nos ajuda a encontrar elementos importantes na parábola tais como foco, diretriz e vértice. Já o fato que $9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x - 4y)^2$ *nos induz a usar a rotação* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *para eliminar o termo misto. De fato,*

$$3x - 4y = 3\left(\tfrac{3u+4v}{5}\right) - 4\left(\tfrac{-4u+3v}{5}\right) = \tfrac{25u}{5} = 5u \quad e$$

$$-30x - 85y = -30\left(\tfrac{3u+4v}{5}\right) - 85\left(\tfrac{-4u+3v}{5}\right) = 50u - 75v\ .$$

Portanto, no sistema (u, v), $\Gamma \colon 25u^2 + 50u - 75v + 175 = 0$. *Dado que*

$$25u^2 + 50u - 75v + 175 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 2u - 3v + 7 = 0 \Leftrightarrow (u+1)^2 = 3(v-2)\ ,$$

temos que Γ *é parábola de vértice* $V = (-1, 2)$ *e foco* $F = \left(-1, \frac{11}{4}\right)$ *(no sistema* (u, v)*), pois* $p = \frac{3}{4}$. *Por sua vez, a diretriz é* $r \colon v = \frac{5}{4}$. *No sistema original (o sistema* (x, y)*),* $V = (1, 2)$ *e* $F = \left(\frac{8}{5}, \frac{49}{5}\right)$. *Já que* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *concluímos que* $r \colon 16x + 12y = 25$.

Exercício 17. *Identifique as cônicas de equações e, no caso das parábolas, explicite o foco e a diretriz:*

(1) $y^2 - 2xy + x^2 + 16x + 16y = 0$
(2) $3x^2 + 12xy + 12y^2 - 2x - 4y - 9 = 0$
(3) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 85x - 30y + 175 = 0$
(4) $7x^2 + 28xy + 28y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$
(5) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$
(6) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 12y + 4 = 0$

Exercício 18. *Mostre que toda parábola é um conjunto ilimitado e infinito.*

Exercício 19. *Uma parábola* Γ *tem vértice* $V = (1, 1)$ *e foco* $F = (0, 2)$*. Determine sua diretriz e equação para* Γ*.*

5. Retas e Parábolas

Proposição 17. *A reta focal de uma parábola é eixo de simetria dela.*

Demonstração. Seja $\Gamma\colon y = ax^2$ (onde $a \neq 0$) uma parábola. Neste caso a reta focal é a reta $x = 0$.

Tomemos um ponto $X = (x, y) \in \Gamma$. Se Y é o simétrico de X com relação à reta $x = 0$, então $Y = (-x, y)$. Como $a(-x)^2 = ax^2 = y$, concluímos que $Y \in \Gamma$. $\square$

Proposição 18. *Toda reta paralela à reta focal de uma parábola a encontra uma única vez.*

Demonstração. Suponhamos $\Gamma\colon y = ax^2$, para $a \neq 0$, e seja $s\colon x = k$. Daí, $s \cap \Gamma = \big\{(k, ak^2)\big\}$. $\square$

Definição 2. *Seja* Γ *uma parábola. Se* $P, Q \in \Gamma$ *são distintos, dizemos que* $\overline{PQ}$ *é uma* ***corda de*** Γ*. Se uma corda de* Γ *passa pelo seu foco, então dizemos que ela é uma* ***corda focal****.*

Exercício 20. *Determine o comprimento da corda focal da parábola* $x^2 + 8y = 0$ *que é paralela à reta* $r\colon 3x + 4y - 7 = 0$*.*

Exercício 21. *Se* $F = \left(2, \frac{5}{2}\right)$ *e* $V = (2, 1)$ *são o* ***foco*** *e o* ***vértice*** *de uma parábola* Γ*. Determine equação geral da reta diretriz de* Γ*, equação para* Γ *e o ponto de* Γ *alinhado com o foco e* $(8, 7)$*.*

Proposição 19. *Toda parábola admite uma corda focal de comprimento mínimo e esta é paralela à sua diretriz.*

Demonstração. Seja $\Gamma\colon 4py = x^2$, para $p \neq 0$. O foco de Γ é $F = (0, p)$ e sua diretriz é $y + p = 0$.

Sejam $P = \left(x_1, \frac{x_1^2}{4p}\right)$ e $Q = \left(x_2, \frac{x_2^2}{4p}\right)$, pontos distintos de Γ. Portanto $x_1 \neq x_2$. Observamos que P, Q e F estão alinhados se, e somente se,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ p & \frac{x_1^2}{4p} & \frac{x_2^2}{4p} \end{vmatrix} = \frac{1}{4p} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 4p^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4p} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^2 - 4p^2 & x_2^2 - 4p^2 \end{vmatrix} = \frac{x_1\left(x_2^2 - 4p^2\right) - x_2\left(x_1^2 - 4p^2\right)}{4p} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1x_2(x_2 - x_1) + 4p^2(x_2 - x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 = -4p^2 \ .$$

O tamanho dessa corda focal é $\left|\frac{x_1^2}{4p} + p\right| + \left|\frac{x_2^2}{4p} + p\right| = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 8p^2}{|4p|}$, onde $x_1x_2 = -4p^2$. Neste caso

$$x_1^2 + x_2^2 + 8p^2 = x_1^2 + \left(\frac{-4p^2}{x_1}\right)^2 + 8p^2 = x_1^2 + \frac{16p^4}{x_1^2} + 8p^2 = \left(x_1 - \frac{4p^2}{x_1}\right)^2 + 16p^2,$$

que atinge valor mínimo quando $x_1^2 = 4p^2$.

Portanto a corda focal de comprimento mínimo tem extremos $(2p, p)$ e $(-2p, p)$ e, consequentemente, é horizontal. Seu comprimento é $4|p|$, ou seja, **o dobro da distância do foco à diretriz**. $\square$

Definição 3. *O* ***latus rectum*** *de uma parábola é a corda focal que tem comprimento mínimo.*

Exercício 22. *Determine os extremos do* ***latus rectum*** *da parábola de equação* $\Gamma\colon x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$*.*

Exercício 23. *Determine os extremos da corda focal da parábola* $\Gamma\colon x^2 + 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y = 0$*, que é paralela à reta* $r\colon x = 7y$*.*

Exercício 24. *Determine uma equação da parábola* Γ *que tem reta focal é o eixo das ordenadas e o ponto* $L = (2, 2)$ *é uma das extremidades do* ***latus rectum****.*

Proposição 20. *Seja Γ uma parábola. Se $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são cordas de Γ, paralelas e distintas, então a reta determinada pelos seus pontos médios é paralela à reta focal de Γ.*

Demonstração. Suponhamos $\Gamma\colon y = ax^2$, para $a \neq 0$, e neste sistema a reta focal é vertical.

Sejam $A_1 = (b, ab^2)$, $A_2 = (c, ac^2)$, $B_1 = (d, ad^2)$ e $B_2 = (e, ae^2)$. Logo $\overrightarrow{A_1A_2} = (c-b, a(c^2-b^2)) = (c-b)(1, a(c+b))$ e $\overrightarrow{B_1B_2} = (e-d)(1, a(e+d))$. Sabemos que $b \neq c$ e $d \neq e$. Se $\overline{A_1A_2}//\overline{B_1B_2}$, então $\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{c-b} // \frac{\overrightarrow{B_1B_2}}{e-d}$ e que $c+b = e+d$.

Sejam M_1 e M_2 os pontos médios de $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$, respectivamente. Daí $M_1 = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{a(b^2+c^2)}{2}\right)$ e $M_2 = \left(\frac{d+e}{2}, \frac{a(d^2+e^2)}{2}\right)$. Já que $c+b = e+d$, concluímos que $\overleftrightarrow{M_1M_2}$ é vertical. □

Tomemos a parábola $\Gamma\colon y = ax^2$, para $a \neq 0$, e fixemos um ponto $X_0 \in \Gamma$. Logo $X_0 = (x_0, y_0)$ com $y_0 = ax_0^2$. Fixemos também um vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ não paralelo à reta focal. Sendo assim $\alpha \neq 0$. Seja r a reta que passa por X_0 e é paralela a $\vec{v}$. Observamos que, para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$X_0 + \lambda\vec{v} \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad ax_0^2 + \lambda\beta = y_0 + \lambda\beta = a(x_0 + \lambda\alpha)^2 = ax_0^2 + 2ax_0\alpha\lambda + a\alpha^2\lambda^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\lambda\Big(a\alpha^2\lambda + 2ax_0\alpha - \beta\Big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = \tfrac{\beta - 2ax_0\alpha}{a\alpha^2}\ .$$

A solução $\lambda = 0$ corresponde ao ponto X_0, que é elemento de $\Gamma \cap r$. Se $\beta - 2ax_0\alpha \neq 0$, então $r \cap \Gamma$ tem exatemente dois elementos. Caso $\beta = 2ax_0\alpha$, deduzimos que $r \cap \Gamma = \{X_0\}$.

A condição $\beta = 2ax_0\alpha$ é equivalente a $\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 2ax_0 \end{vmatrix} = 0$, ou ainda, a $\vec{v}//(1, 2ax_0)$.

Proposição 21. ***Não*** *existem três pontos colineares em uma parábola.*

Demonstração. Suponhamos $\Gamma\colon y = ax^2$, onde $a \neq 0$, e r uma reta. Suponhamos $r \cap \Gamma \neq \emptyset$ e seja $X_0 \in r \cap \Gamma$. Pela discussão feita acima, $r \cap \Gamma$ tem no máximo dois elementos. Logo não há três pontos distintos de Γ que estejam alinhados. □

Corolário 4. *A reta focal é o* ***único*** *eixo de simetria de uma parábola.*

Demonstração. Seja Γ uma parábola e suponha que r é um eixo de simetria para Γ. Para cada ponto X, seja X' o simétrico de X com relação à reta r. Pela proposição 21, deduzimos que $r \cap \Gamma$ tem no máximo dois elementos. Pelo exercício 18, podemo fixar $P \in \Gamma \setminus r = \Gamma \setminus (r \cap \Gamma)$. Caso $P = P'$, teríamos $P \in r$, o que não acontece. Logo P e P' são distintos e determinam corda de Γ. Fixemos $Q \in \Gamma \setminus (r \cup \{P, P'\})$. Analogamente, Q e Q' são distintos e também determinam corda de Γ. Se $Q' = P'$ ou $Q' = P$, então $Q = P$ ou $Q = P'$, algo que não acontece. Portanto $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são cordas distintas. Como ambas são perpendiculares a r, $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são segmentos paralelos. Pela proposição 20, seus pontos médios determinam reta paralela à reta focal. Como estes pontos médios estão em r, r é paralela à reta focal.

Seja $\Gamma\colon y = ax^2$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Logo $r\colon x = c$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Se $X = (x, y)$, então $X' = (2c - x, y)$. Uma vez que $(0,0) \in \Gamma$, deduzimos que $(2c, 0) \in \Gamma$. Consequentemente $c = 0$ e $r\colon x = 0$, que é a reta focal de Γ. □

Teorema 22. *Sejam Γ uma parábola e $X_0 \in \Gamma$. Existe uma única reta t tal que $t \cap \Gamma = \{X_0\}$ e t* ***não é paralela*** *à reta focal de Γ.*

Demonstração. Suponhamos $\Gamma\colon y = ax^2$, onde $a \neq 0$. Daí $X_0 = (x_0, y_0)$ com $y_0 = ax_0^2$. Pela discussão feita acima a reta $t : X = X_0 + \lambda(1, 2ax_0)$ (para $\lambda \in \mathbb{R}$) não é paralela à reta focal de Γ e tem interseção unitária com Γ. Também pela mesma discussão é a única reta satisfazendo essas condições. □

Definição 4. *Sejam Γ uma parábola e $X_0 \in \Gamma$. A* ***reta tangente a** Γ **no ponto*** *X_0 é a reta que passa por X_0, tem interseção unitária com Γ e não é paralela à reta focal. A* ***reta normal a** Γ **no ponto*** *X_0 é a reta que passa por X_0 e é perpendicular à reta tangente no mesmo ponto X_0.*

Pela discussão feita acima, a reta tangente encontra Γ somente no ponto X_0 e para cada ponto de Γ somente duas retas têm essa propriedade: a reta tangente e aquela paralela à reta focal.

Corolário 5. *Se $\Gamma\colon y = ax^2$, onde $a \neq 0$, então $2ax_0x - y = ax_0^2$ é equação para a reta tangente a Γ no ponto (x_0, ax_0^2).*

Demonstração. Observamos a demonstração do teorema anterior, a reta tangente a Γ no ponto (x_0, ax_0^2) é paralela ao vetor $(1, 2ax_0)$. Dado que

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & 1 \\ y - ax_0^2 & 2ax_0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2ax_0x - (y - ax_0^2) = 0 \Leftrightarrow 2ax_0x - y = ax_0^2 \ ,$$

a reta tangente tem equação $2ax_0x - y = ax_0^2$. $\square$

Exercício 25. *Se $\Gamma\colon x = ay^2$, onde $a \neq 0$, mostre que a reta tangente a Γ no ponto $(2ay_0^2, y_0)$ tem equação $2ay_0y - x = ay_0^2$.*

Exercício 26. *Determine as retas tangente e normal à parábola Γ no ponto P para os casos:*

(1) $\Gamma\colon x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$ *e* $P = \left(0, -\frac{3}{2}\right)$
(2) $\Gamma\colon x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$ *e* $P = \left(3, -\frac{9}{5}\right)$
(3) $\Gamma\colon y^2 + 4y - 16x - 44 = 0$ *e* $P = (-3, -2)$
(4) $\Gamma\colon 4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ *e* $P = (0, 0)$
(5) $\Gamma\colon x^2 - 8xy + 16y^2 - 4x + 10y + 4 = 0$ *e* $P = \left(\frac{13}{8}, \frac{3}{32}\right)$
(6) $\Gamma\colon y = 4x - x^2$ *e* $P = (4, 0)$

Exercício 27. *Determine o que se pede nos casos:*

(1) a reta tangente a $\Gamma\colon x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$ *que é paralela a* $r\colon 3x + 4y = 0$
(2) a reta tangente a $\Gamma\colon x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$ *que é paralela* $r\colon x + y = 0$
(3) a reta normal a $\Gamma\colon y^2 + 4y - 16x - 44 = 0$ *que é paralela a* $r\colon y + x = 5$
(4) a reta tangente a $\Gamma\colon 4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ *que é ortogonal ao eixo x*
(5) a reta normal a $\Gamma\colon y^2 - 8xy + 16x^2 - 4x + 10y + 4 = 0$ *é ortogonal a* $r\colon x = \frac{1}{48}$

Exercício 28. *Determine as retas tangente à parábola $\Gamma\colon x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y = 0$, que passam pelo ponto $P = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.*

Proposição 23. *Sejam Γ uma parábola, $X_0 \in \Gamma$, $\overrightarrow{t_0}$ e $\overrightarrow{n_0}$ vetores diretores das retas tangente e normal à Γ em X_0, respectivamente. Se H_0 é o ponto da diretriz mais próximo de X_0, então $\operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0H_0}, \overrightarrow{t_0}) = \operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F}, \overrightarrow{t_0})$. Ainda, $\operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F}, \overrightarrow{n_0}) = \operatorname{ang}(\overrightarrow{VF}, \overrightarrow{n_0})$, onde F é o foco de Γ.*

Demonstração. Podemos supor $\Gamma\colon y = ax^2$, para $a \neq 0$. Sendo assim, $\overrightarrow{VF} = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$, $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e a diretriz é $r\colon y + \frac{1}{4a} = 0$. Sejam $\overrightarrow{u_0} = (1, 2ax_0)$ e $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{u_0}^{\perp} = (-2ax_0, 1)$. Dadas as condições, deduzimos que $\overrightarrow{t_0} = \lambda\overrightarrow{u_0}$ e $\overrightarrow{n_0} = \mu\overrightarrow{v_0}$, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, não nulos.

Sejam $\theta_1 = \operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0H_0}, \overrightarrow{t_0})$ e $\theta_2 = \operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F}, \overrightarrow{t_0})$. Já que $\overrightarrow{X_0F} = \left(-x_0, \frac{1}{4a} - ax_0{}^2\right)$,

$$\overrightarrow{u_0} \bullet \overrightarrow{X_0F} = (1, 2ax_0) \bullet \left(-x_0, \frac{1}{4a} - ax_0{}^2\right) = -x_0 + \frac{2ax_0}{4a} - 2a^2x_0{}^3 = -\frac{x_0}{2} - 2a^2x_0{}^3 = -\frac{x_0(1 + 4a^2x_0^2)}{2} \ .$$

Visto que H_0 é o ponto de r mais próximo de X_0, então $H_0 = \left(x_0, -\frac{1}{4a}\right)$, $\overrightarrow{X_0H_0} = \left(0, -\frac{1}{4a} - ax_0{}^2\right)$ e

$$\overrightarrow{u_0} \bullet \overrightarrow{X_0H_0} = (1, 2ax_0) \bullet \left(0, -\frac{1}{4a} - ax_0{}^2\right) = -\frac{2ax_0}{4a} - 2a^2x_0{}^3 = -\frac{x_0}{2} - 2a^2x_0{}^3 = \overrightarrow{t_0} \bullet \overrightarrow{X_0F} \ .$$

Uma vez que $\|\overrightarrow{X_0F}\| = d(X_0, F) = d(X_0, r) = \|\overrightarrow{X_0H_0}\|$, concluímos que $\theta_1 = \theta_2$ pois

$$\cos\theta_1 = \frac{\overrightarrow{t_0} \bullet \overrightarrow{X_0H_0}}{\|\overrightarrow{t_0}\| \cdot \|\overrightarrow{X_0H_0}\|} = \frac{\lambda(\overrightarrow{u_0} \bullet \overrightarrow{X_0H_0})}{\|\overrightarrow{t_0}\| \cdot \|\overrightarrow{X_0H_0}\|} = \frac{\lambda(\overrightarrow{u_0} \bullet \overrightarrow{X_0F})}{\|\overrightarrow{t_0}\| \cdot \|\overrightarrow{X_0F}\|} = \frac{\overrightarrow{t_0} \bullet \overrightarrow{X_0F}}{\|\overrightarrow{t_0}\| \cdot \|\overrightarrow{X_0F}\|} = \cos\theta_2 \ .$$

Agora sejam $\alpha_1 = \operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F}, \overrightarrow{n_0})$ e $\alpha_2 = \operatorname{ang}(\overrightarrow{VF}, \overrightarrow{n_0})$. Dado que

$$\overrightarrow{X_0F} \bullet \overrightarrow{v_0} = 2ax_0^2 + \tfrac{1}{4a} - ax_0^2 = \tfrac{1}{4a} + ax_0^2 = \tfrac{1+4a^2x_0^2}{4a} = \tfrac{\|\overrightarrow{v_0}\|^2}{4a} \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{X_0F}\| = \sqrt{x_0{}^2 + \left(\tfrac{1}{4a} - ax_0{}^2\right)^2} =$$
$$= \sqrt{x_0^2 + \tfrac{1}{16a^2} - \tfrac{x_0{}^2}{2} + a^2x_0^4} = \sqrt{\tfrac{1}{16a^2} + \tfrac{x_0{}^2}{2} + a^2x_0^4} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4a} + ax_0^2\right)^2} = \left|\tfrac{1}{4a} + ax_0^2\right| = \tfrac{1+4a^2x_0^2}{4|a|} = \tfrac{\|\overrightarrow{v_0}\|^2}{4|a|},$$

deduzimos que

$$\cos\alpha_1 = \frac{\overrightarrow{X_0F} \bullet \overrightarrow{n_0}}{\|\overrightarrow{X_0F}\| \cdot \|\overrightarrow{n_0}\|} = \frac{\mu(\overrightarrow{X_0F} \bullet \overrightarrow{v_0})}{\|\overrightarrow{X_0F}\| \cdot |\mu| \cdot \|\overrightarrow{v_0}\|} = \frac{\mu}{|\mu|} \cdot \frac{\frac{\|\overrightarrow{v_0}\|^2}{4a}}{\|\overrightarrow{v_0}\| \cdot \frac{\|\overrightarrow{v_0}\|^2}{4|a|}} = \frac{|\mu a|}{\mu a\|\overrightarrow{v_0}\|} \ .$$

Por outro lado,

$$\cos\alpha_2 = \frac{\overrightarrow{VF} \bullet \overrightarrow{n_0}}{\|\overrightarrow{VF}\| \cdot \|\overrightarrow{n_0}\|} = \frac{\mu(\overrightarrow{VF} \bullet \overrightarrow{v_0})}{\|\overrightarrow{VF}\| \cdot |\mu| \cdot \|\overrightarrow{v_0}\|} = \frac{\mu}{|\mu|} \cdot \frac{\frac{1}{4a}}{\frac{1}{4|a|} \cdot \|\overrightarrow{v_0}\|} = \frac{|\mu a|}{\mu a\|\overrightarrow{v_0}\|} = \cos\alpha_1$$

e, consequentemente, $\alpha_1 = \alpha_2$. □

Os resultados da proposição anterior mostram dois fatos interessantes:

(1) para construir a reta tangente à parabola Γ em um certo ponto X_0, basta achar H_0, que é o ponto da diretriz mais próximo de X_0, e a bissetriz entre as retas $\overleftrightarrow{X_0F}$ e $\overleftrightarrow{X_0H_0}$ que deixa Γ toda de um lado só.

(2) se um raio de luz é emitido do foco, ele se refletirá paralelo à reta focal. Propriedade usada, por exemplo, nas antenas parabólicas

6. Elipses

Sejam F_1 e F_2 pontos distintos e uma constante $a > \frac{d(F_1,F_2)}{2}$. A **elipse de focos** F_1 **e** F_2 **e parâmetro** a é a curva determinada pelos pontos cuja soma das distâncias aos focos é $2a$. Se $\mathbb{E}$ é a elipse determinada por F_1, F_2 e a, então, para o ponto X,

$$X \in \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad d(X,F_1) + d(X,F_2) = 2a \ .$$

Seja C o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. Suponhamos que $X \in \mathbb{E}$ e seja Y o simétrico de X com relação a C. Sendo assim, $\overrightarrow{YC} = \overrightarrow{CX}$,

$$\overrightarrow{YF_2} = \overrightarrow{YC} + \overrightarrow{CF_2} = \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{F_1C} = \overrightarrow{F_1X} \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{YF_1} = \overrightarrow{YC} + \overrightarrow{CF_1} = \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{F_2C} = \overrightarrow{F_2X}.$$

Portanto

$$d(Y,F_1) + d(Y,F_2) = d(X,F_2) + d(X,F_1) = 2a \ .$$

Ou seja, $Y \in \mathbb{E}$.

Definição 5. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse de focos F_1 e F_2. O segmento $\overline{F_1F_2}$ é chamado de* ***segmento focal de*** *$\mathbb{E}$, enquanto a* ***reta focal de*** *$\mathbb{E}$ é a reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$. O ponto médio do segmento focal é chamado de* ***centro de*** *$\mathbb{E}$. A* ***distância focal*** *é o número $d(F_1,F_2)$. Se $X \in \mathbb{E}$, os* ***raios focais de*** *X são as distâncias de X aos focos de $\mathbb{E}$.*

Provamos acima que a elipse é **simétrica** com relação ao seu centro.

Fixemos um sistema de coordenadas no qual a reta focal seja horizontal. Portanto $C = (h,k)$. Dado que $\overrightarrow{CF_1} = -\overrightarrow{CF_2}$, que são ambos paralelos a $\overleftrightarrow{F_1F_2}$, podemos fixar $\overrightarrow{CF_2} = (c,0)$, com $c > 0$. Daí $F_2 = C + \overrightarrow{CF_2} = (h+c,k)$ e $F_1 = C - \overrightarrow{CF_2} = (h-c,k)$. Visto que $d(F_1,F_2) = 2c$, induzimos que $a > c$. Se $b = \sqrt{a^2-c^2}$, então $a > b > 0$ e $a^2 = b^2 + c^2$. Os números a, b e c são chamados de **parâmetros geométricos** da elipse.

Procuremos agora uma equação para a elipse $\mathbb{E}$ nas condições acima. Para $X = (x,y)$, sejam $u = x - h$ e $v = y - k$. Logo

$$\begin{aligned}
X \in \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad & \sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2} + \sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} = 2a \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sqrt{(u+c)^2 + (y-k)^2} + \sqrt{(u-c)^2 + (y-k)^2} = 2a \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sqrt{\left(u^2+c^2+v^2\right) + 2cu} + \sqrt{\left(u^2+c^2+v^2\right) - 2cu} = 2a \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 2\left(u^2+c^2+v^2\right) + 2\sqrt{\left(u^2+c^2+v^2\right)^2 - 4c^2u^2} = 4a^2 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sqrt{\left(u^2+c^2+v^2\right)^2 - 4c^2u^2} = 2a^2 - \left(u^2+c^2+v^2\right) \quad \Longrightarrow \\
& \Longrightarrow \left(u^2+c^2+v^2\right)^2 - 4c^2u^2 = \Big(2a^2 - \left(u^2+c^2+v^2\right)\Big)^2 \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -4c^2u^2 = 4a^4 - 4a^2\left(u^2+c^2+v^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad a^2\left(u^2+c^2+v^2\right) - c^2u^2 = a^4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^2-c^2)u^2 + a^2v^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2-c^2)b^2u^2 + a^2v^2 = a^2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \ .$$

Acabamos de mostrar que, se $X \in \mathbb{E}$, então $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. A proposição a seguir vai mostrar a recíproca, o que finaliza a procura por alguma equação da elipse $\mathbb{E}$.

Proposição 24. *Nas mesmas condições da discussão feita até este instante, se $X = (x, y)$ é um ponto do plano que satisfaz a equação $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, então $d(X, F_1) = a + \frac{c(x-h)}{a}$, $d(X, F_2) = a - \frac{c(x-h)}{a}$ e X pertence à elipse $\mathbb{E}$.*

Demonstração. Fixemos $X = (x, y)$ nas condições da hipótese. Daí $(y-k)^2 = b^2 - \frac{b^2(x-h)^2}{a^2}$ e

$$\Big(d(X, F_1)\Big)^2 = (x-h+c)^2 + (y-k)^2 = (x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + b^2 - \frac{b^2(x-h)^2}{a^2} =$$
$$= (x-h)^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2c(x-h) + a^2 = \frac{c^2(x-h)^2}{a^2} + 2c(x-h) + a^2 = \left(\frac{c(x-h)}{a} + a\right)^2 .$$

Ou seja, $d(X, F_1) = \left|\frac{c(x-h)}{a} + a\right|$. Analogamente, induzimos que $d(X, F_2) = \left|\frac{c(x-h)}{a} - a\right|$. Como $\frac{(x-h)^2}{a^2} \le 1$, deduzimos que que $(x-h)^2 \le a^2$ e $|x-h| \le a$. Daí $\frac{c|x-h|}{a} \le c < a$, ou seja, $-a < \frac{c(x-h)}{a} < a$. Portanto $\frac{c(x-h)}{a} + a > 0$ e $\frac{c(x-h)}{a} - a < 0$. Logo

$$d(X, F_1) = a + \frac{c(x-h)}{a} \quad \text{e} \quad d(X, F_2) = a - \frac{c(x-h)}{a}.$$

Ainda, $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$ e $X \in \mathbb{E}$. □

Portanto fica demonstrado o teorema:

Teorema 25. *Sejam $a, c \in \mathbb{R}$ tais que $a > c > 0$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Dados os pontos $C = (h, k)$, $F_1 = (h - c, k)$ e $F_2 = (h + c, k)$, seja $\mathbb{E}$ a elipse de focos F_1 e F_2 e parâmetro a. Para um ponto $X = (x, y)$,*

$$X \in \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 .$$

□

Corolário 6. *Sejam $a, c \in \mathbb{R}$ tais que $a > c > 0$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Dados os pontos $C = (h, k)$, $F_1 = (h, k - c)$ e $F_2 = (h, k + c)$, seja $\mathbb{E}$ a elipse de focos F_1 e F_2 e parâmetro a. Para um ponto $X = (x, y)$,*

$$X \in \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 .$$

Demonstração. Primeiro tomemos a translação $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$. Logo $C = (0, 0)$, $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$, no sistema (u, v). Rotacionemos os eixos de (u, v) por $\frac{\pi}{2}$, ou seja, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$. Daí $C = (0, 0)$, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ no sistema (t, w). Pelo teorema anterior:

$$X = (t, w) \in \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2}{a^2} + \frac{w^2}{b^2} = 1 .$$

Uma vez que $\begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, deduzimos que $\mathbb{E}$: $\frac{v^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} = 1$. Finalmente, no sistema (x, y):

$$X = (x, y) \in \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 .$$

□

Uma consequência imediata destes dois últimos resultados é que toda elipse com reta focal paralela a um dos eixos coordenados admite **equação de 2º.grau sem termo misto**.

Exercício 29. *Um ponto $P = (x, y)$ se desloca no plano de modo que a soma das distâncias aos pontos $A = (3, 1)$ e $B = (-5, 1)$ é 10. Diga qual curva é descrita por P e em seguida determina equação para essa curva.*

Exercício 30. *Determine os raios focais do ponto $P = \left(3, \frac{7}{4}\right)$ sobre a elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$.*

Exercício 31. *Um segmento AB de medida 12, desloca-se de modo que A percorre o eixo das abscissas e B o das ordenadas. O ponto $P = (x, y)$ é interior ao segmento AB e fica situado a 8 de A. Estabeleça equação do lugar geométrico descrito pelo ponto P.*

Se C é um ponto e $r > 0$, lembramos que a **circunferência de centro** C **e raio** r é o conjunto dos pontos do plano que distam r de C. Se $\mathbf{C}$ for a circunferência determinada por C e r, então, para o ponto X,

$$X \in \mathbf{C} \Leftrightarrow d(X, C) = r \ .$$

Teorema 26. *Sejam $h, k, r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$. Dado o ponto $C = (h, k)$, seja $\mathbf{C}$ a circunferência de centro C e raio r. Para um ponto $X = (x, y)$,*

$$X \in \mathbf{C} \quad \Leftrightarrow \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \ .$$

Demonstração. É imediato da fórmula de distância. □

Portanto, em qualquer sistema de coordenadas, toda circunferência tem equação de 2º.grau que **não tem** misto e cujos termos de 2º.grau têm mesmo coeficiente.

Observação 1. *É interessante também notar que toda circunferência pode ser considerada uma elipse, quando se permite tomar $F_1 = F_2$, ou seja, para $c = 0$.*

Exercício 32. *Suponha $A \neq 0$. Determine condições para que $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ seja equação de uma circunferência.*

Exercício 33. *Sejam $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$, distintos. Determine equação para os pontos X do plano que satisfazem $\overrightarrow{XA} \perp \overrightarrow{XB}$. Que curva é essa?*

Teorema 27. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse de centro C e parâmetros geométricos a, b e c. Para todo $X \in \mathbb{E}$, $b \leq d(X, C) \leq a$.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas (x, y) com origem em C e tal que a reta focal seja horizontal. Daí $C = (0, 0)$ e $\mathbb{E}$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tomemos $X = (x, y) \in \mathbb{E}$. Como $\frac{1}{b^2} > \frac{1}{a^2}$,

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \leq \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 + y^2}{b^2} \ .$$

Portanto $b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$ e, consequentemente, $b \leq d(X, C) = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a$. □

Imediatamente, concluímos que toda elipse é um **conjunto limitado**.

Exercício 34. *Mostre toda elipse e toda circunferência é conjunto infinito.*

Corolário 7. *Consideremos as mesmas condições do teorema anterior.*

(1) Existem $A_1, A_2 \in \mathbb{E}$, simétricos com relação a C, tal que, para $X \in \mathbb{E}$, $d(X, C) = a$ se, e somente se, $X = A_1$ ou $X = A_2$. Ademais, A_1 e A_2 estão na reta focal.
(2) Existem $B_1, B_2 \in \mathbb{E}$, simétricos com relação a C, tal que, para $X \in \mathbb{E}$, $d(X, C) = b$ se, e somente se, $X = B_1$ ou $X = B_2$. Além disto, o quadrilátero $F_1B_1F_2B_2$ é um losando com lados medindo a.

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas (x, y) com origem em C e tal que a reta focal seja horizontal. Daí $C = (0, 0)$, os focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$; e $\mathbb{E}$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(1) Sejam $A_2 = (a, 0)$ e $A_1 = (-a, 0)$. Logo deduzimos que C é ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$ e que os dois pontos estão na reta focal, que é a reta $y = 0$. Também é imediato que A_1 e A_2 são pontos de $\mathbb{E}$ e que $d(A_1, C) = d(A_2, C) = a$. Suponhamos $X = (x, y) \in \mathbb{E}$ tal que $d(X, C) = a$. Logo

$$1 = \frac{x^2 + y^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Sendo asssim, $\frac{y^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$ e $y = 0$. Consequentemente, $x = a$ ou $x = -a$.

(2) Sejam $B_2 = (0, b)$ e $B_1 = (0, -b)$. Imediatamente deduzimos que $B_1, B_2 \in \mathbb{E}$, que C é ponto médio do segmento $\overline{B_1B_2}$ e que $d(B_1, C) = d(B_2, C) = b$. Ainda $d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2) = d(B_2, F_1) = d(B_2, F_2) = \sqrt{c^2 + b^2} = a$ e o quadrilátero $F_1B_1F_2B_2$ é um losando. Suponhamos $X = (x, y) \in \mathbb{E}$ tal que $d(X, C) = b$. Logo

$$1 = \frac{x^2 + y^2}{b^2} \geq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Sendo asssim, $\frac{x^2}{a^2} = \frac{x^2}{b^2}$ e $x = 0$. Consequentemente, $y = b$ ou $y = -b$. □

Definição 6. *Os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 do corolário anterior são chamados de* ***vértices da elipse****. O segmento $\overline{A_1A_2}$ é chamado de* ***eixo maior da elipse*** *. O segmento $\overline{B_1B_2}$ é chamado de* ***eixo menor da elipse****.*

Imediatamente deduzimos que os quatro vértices de uma elipse determinam um losango. Ainda, os triângulos $\triangle F_1CB_1$, $\triangle F_2CB_1$, $\triangle F_2CB_2$ e $\triangle F_1CB_2$ são todos retângulos no vértice C com seus catetos medindo c e b, enquanto suas hipotenusas medem a.

Exercício 35. *Seja $PQRS$ um losango. Qual condição $PQRS$ deve satisfazer para que P, Q, R e S sejam vértices de uma elipse? Como construir essa elipse?*

Exercício 36. *Determine fórmula para as distâncias dos vértices do eixo maior de uma elipse aos seus focos.*

Exercício 37. *Determinar os focos, o centro, os vértices e os parâmetros de cada uma das* ***elipses****:*

(1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$
(2) $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$
(3) $4x^2 + y^2 = 1$
(4) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$
(5) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$
(6) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

Exercício 38. *Mostre que as retas suportes dos eixos maior e menor são eixos de simetria para uma elipse.*

Teorema 28. *Elipses e circunferências admitem equação $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + dx + ey + f = 0$, onde $\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{vmatrix} > 0$ e $(\alpha + \gamma) \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} < 0$.*

Demonstração. Seja $\mathbf{C}$ uma circunferência de centro $C = (h, k)$ e raio r. Pelo teorema 26,

$$\mathbf{C}\colon x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0 \ .$$

De fato, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, enquanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ -h & -k & h^2 + k^2 - r^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -h & -k & -r^2 \end{vmatrix} = -r^2 \ .$$

Seja $\mathbb{E}$ um elipse de centro $C = (h, k)$ e parâmetros a, b e c. Aplicando a translação $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$, obtemos que $C = (0, 0)$, no sistema (u, v). Usemos uma rotação $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$ que deixa a reta focal horizontal. Pelo teorema 25, $\mathbb{E}\colon \frac{t^2}{a^2} + \frac{w^2}{b^2} - 1 = 0$, no sistema (t, w). Mas

$$\frac{t^2}{a^2} + \frac{w^2}{b^2} = \begin{pmatrix} t & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} .$$

Por outro lado, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix}$, para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, dado que é matriz simétrica. Logo, no sistema (u, v), $\mathbb{E}\colon \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 - 1 = 0$. Pela proposição 7, deduzimos que as matrizes $\begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$ têm mesmos traço e determinante. Sendo assim, $\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2} > 0$ e $\alpha + \beta = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > 0$.

No sistema original, $\mathbb{E}\colon \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + dx + ey + f = 0$, e, pela proposição 2,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & 0 \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2b^2} \ ,$$

o qual conclui a tese do teorema. □

Agora vejamos uma recíproca para o teorema anterior.

Teorema 29. *Seja* $\Gamma\colon \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + dx + ey + f = 0$ *uma cônica onde* $\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{vmatrix} > 0$ *e* $(\alpha + \gamma) \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} < 0$. *Então* Γ *descreve uma elipse ou uma circunferência.*

Demonstração. Dado que $\alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4} \neq 0$, existem únicos $h, k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Logo a translação $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$ anula os coeficientes dos termos de 1º.grau. Por conseguinte, no sistema (u, v), $\Gamma\colon \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 + f' = 0$, para algum $f' \in \mathbb{R}$. Pela proposição 2,

$$0 > (\alpha + \gamma) \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = (\alpha + \gamma) \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & 0 \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{vmatrix} = (\alpha + \gamma) \left(\alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4} \right) f' \ .$$

Portanto $f'(\alpha + \gamma) < 0$.

Tomemos uma rotação $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$ que elimina o termo misto. Sendo assim, no sistema (t, w), $\Gamma\colon \delta t^2 + \epsilon w^2 + f' = 0$, para $\delta, \epsilon \in \mathbb{R}$, satisfazendo $\delta + \epsilon = \alpha + \gamma$ e $\delta\epsilon = \alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4}$, pela proposição 7. Consequentemente, $\delta\epsilon > 0$ e $f'(\delta + \epsilon) < 0$.

Se $\delta > 0$, então $\epsilon > 0$, $\delta + \epsilon > 0$ e $f' < 0$. Caso $\delta < 0$, deduzimos que $\epsilon < 0$, $\delta + \epsilon < 0$ e $f' > 0$. Em qualquer das situações, $\delta f' < 0$ e $\epsilon f' < 0$. Sejam $\lambda = \sqrt{-\frac{f'}{\delta}}$ e $\mu = \sqrt{-\frac{f'}{\epsilon}}$. Observamos que

$$\delta t^2 + \epsilon w^2 + f' = 0 \Leftrightarrow -\frac{f't^2}{\lambda^2} - \frac{f'w^2}{\mu^2} + f' = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2}{\lambda^2} + \frac{w^2}{\mu^2} = 1 \ .$$

Portanto $\Gamma\colon \frac{t^2}{\lambda^2} + \frac{w^2}{\mu^2} = 1$, que corresponde a equação de elipse ou de circunferência. □

Teorema 30. *Seja* $\Gamma\colon \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + dx + ey + f = 0$ *uma cônica onde* $\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{vmatrix} > 0$.

(1) Se $\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = 0$, *então* Γ *descreve um ponto.*

(2) Se $(\alpha + \gamma) \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} > 0$, *então* Γ *corresponde ao conjunto vazio.*

Demonstração. Em qualquer dos casos, conclui-se que $(\alpha+\gamma)\cdot\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix} \geq 0$. Como $\alpha\gamma > \frac{b^2}{4}$, deduzimos que α e γ são ambos não nulos e têm mesmo sinal. Consequentemente, $\alpha+\gamma\neq 0$. Dado que $\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}\neq 0$, existem únicos $h,k\in\mathbb{R}$ tais que

$$\begin{pmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Logo a translação $\begin{cases}x=u+h\\ y=v+k\end{cases}$ anula os coeficientes dos termos de 1º.grau. Por conseguinte, no sistema (u,v), $\Gamma\colon \alpha u^2+\beta uv+\gamma v^2+f'=0$, para algum $f'\in\mathbb{R}$. Pela proposição 2,

$$(\alpha+\gamma)\cdot\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=(\alpha+\gamma)\cdot\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & 0\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & 0\\ 0 & 0 & f'\end{vmatrix}=(\alpha+\gamma)\left(\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)f'.$$

Tomemos uma rotação $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\w\end{pmatrix}$ que elimina o termo misto. Sendo assim, no sistema (t,w), $\Gamma\colon \delta t^2+\epsilon w^2+f'=0$, para $\delta,\epsilon\in\mathbb{R}$, satisfazendo $\delta+\epsilon=\alpha+\gamma$ e $\delta\epsilon=\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}$, pela proposição 7.

(1) Se $\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=0$, então $f'=0$. Dado que $\delta\epsilon>0$, observamos que $\delta t^2+\epsilon w^2=0$ se, e somente se, $t=w=0$. Neste caso, Γ representa o conjunto unitário $\{(0,0)\}$, no sistema (t,w), ou seja, o $\{(h,k)\}$, no sistema (x,y).

(2) Se $(\alpha+\gamma)\cdot\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}>0$, então $(\alpha+\gamma)f'>0$ e $(\delta+\epsilon)f'>0$. Neste caso, δ,ϵ e f' são todos não nulos e têm mesmo sinal. Portanto não há ponto (t,w) que satisfaça $\delta t^2+\epsilon w^2+f'=0$. Neste caso, Γ corresponde ao conjunto vazio. □

Observação 2. *Nas condições dos teoremas, se a cônica não for vazia, a translação que elimina os termos de 1º.grau, determina o centro de elipse ou da circunferência, ou ainda o único ponto que satisfaz a equação de* Γ.

Exemplo 4. *A demonstração do teorema 29 nos deu um roteiro de como determinar qual cônica a equação ela representa: efetuar um translação e depois uma rotação!*

Tomemos, por exemplo, $\Gamma\colon 4x^2-4xy+7y^2+12x+6y-9=0$. *O sistema linear* $\begin{cases}4h-2k+6=0\\ -2h+7k+3=0\end{cases}$ *tem solução única* $(h,k)=(-2,-1)$. *Depois da translação* $\begin{cases}x=u-2\\ y=v-1\end{cases}$, *obtemos* $\Gamma\colon 4u^2-4uv+7v^2-24=0$ *(verificar!).*

Para a rotação, estudemos as raízes de $\begin{vmatrix}4-\lambda & -2\\ -2 & 7-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-11\lambda+24$, *que são 3 e 8. O sistema* $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, *tem soluções* $(\alpha,\beta)//(2,1)$. *Depois da rotação* $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\w\end{pmatrix}$, *chegamos a* $\Gamma\colon 3t^2+8w^2=24$, *ou equivalentemente,*

$$\Gamma\colon \frac{t^2}{8}+\frac{w^2}{3}=1,$$

que é uma ***elipse de reta focal horizontal*** *com parâmetros* $a=2\sqrt2$, $b=\sqrt3$ *e* $c=\sqrt5$. *A seguir colocamos as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices nos diferentes sistemas:*

	(t,w)	(u,v)	(x,y)
Centro	$(0,0)$	$(0,0)$	$(-2,-1)$
Foco	$\left(-\sqrt{5},0\right)$	$(-2,-1)$	$(-4,-2)$
Foco	$\left(\sqrt{5},0\right)$	$(2,1)$	$(0,0)$
Vértice	$\left(-2\sqrt{2},0\right)$	$\left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$	$\left(-2-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-1-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$
Vértice	$(2\sqrt{2},0)$	$\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$	$\left(-2+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-1+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$
Vértice	$\left(0,-\sqrt{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$	$\left(-2+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},-1-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$
Vértice	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$	$\left(-2-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},-1+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$

Exercício 39. *Determine os focos, o centro, os vértices e os parâmetros das elipses:*

(1) $3x^2+2xy+3y^2+6\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+2=0$ *(2)* $7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-16=0$

Definição 7. *Seja $\mathbb{E}$ de semi-eixo focal medindo c e semi-eixo maior medindo a. A **excentricidade de** $\mathbb{E}$ é o número $\frac{c}{a}$.*

A excentricidade de uma elipse é sempre um real entre 0 e 1. Quando mais próximo de zero for a excentricidade, mais a elipse se aproxima de uma circunferência. Seguindo essa linha de reciocínio, alguns autores consideram que uma circunferência é uma elipse de excentricidade 0.

Exercício 40. *Para cada item, determine uma equação da elipse a partir das informações dadas. Determine os focos, o centro, os vértice e seus parâmetros, nos casos onde não houver a informação.*

(1) focos $F_1=(3,8)$ e $F_2=(3,2)$ e comprimento do eixo maior 10.
(2) excentricidade $e=\frac{3}{4}$ e eixo menor com extremos $(5,-1)$ e $(-3,-1)$.
(3) centro $C=(-1,-1)$, excentricidade $e=\frac{2}{3}$ e $(5,-1)$ é vértice do eixo maior.
(4) centro $C=(1,2)$, foco $F=(6,2)$ e $P=(4,6)$ é um ponto da elipse.
(5) centro em $r\colon y=2$, foco $F=(3,4)$, excentricidade $e=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ e com eixos paralelos aos eixos coordenados.
(6) vértice $V=(3,-3)$ e eixo menor de extremos $B_1=(2,2)$ e $B_2=(-2,-2)$.

Exercício 41. *Determine uma equação da cônica com centro na reta $r\colon x-3=0$, eixo focal paralelo ao eixo das abscissas, vértice $V=(7,0)$ e excentricidade $e=\frac{1}{2}$. Quais são os focos, o centro e os outros vértices dessa elipse?*

7. Retas e Elipses

Teorema 31. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse de focos F_1 e F_2 e excentricidade e. Existem r_1 e r_2, retas perpendiculares à reta focal, tais que, para o ponto X,*

$$X\in\mathbb{E}\quad\Leftrightarrow\quad d(X,F_1)=e\cdot d(X,r_1)\quad\Leftrightarrow\quad d(X,F_2)=e\cdot d(X,r_2)\ .$$

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas com origem no centro de $\mathbb{E}$ e tal a reta focal seja horizontal. Logo $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a>b>0$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$ e $e=\frac{c}{a}$. Ainda $F_1=(-c,0)$ e $F_2=(c,0)$. Sejam $r_1\colon x+\frac{a^2}{c}=0$ e $r_2\colon x-\frac{a^2}{c}=0$. Naturalmente r_1 e r_2 são verticais e perpendiculares à reta focal. Para $X=(x,y)$,

$$d(X,F_1)=e\cdot d(X,r_1)\Leftrightarrow\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\frac{c}{a}\left|x+\frac{a^2}{c}\right|\Leftrightarrow(x+c)^2+y^2=\left(\frac{cx}{a}+a\right)^2\Leftrightarrow$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2=\frac{c^2x^2}{a^2}+2cx+a^2\Leftrightarrow\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2\Leftrightarrow\frac{b^2x^2}{a^2}+y^2=b^2$$
$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad\Leftrightarrow\quad X\in\mathbb{E}\ .$$

Analogamente, mostra-se que $d(X,F_2)=e\cdot d(X,r_2)$ se, e somente se, $X\in\mathbb{E}$. □

Definição 8. *As retas r_1 e r_2 do teorema são chamadas de **diretrizes da elipse**.*

Corolário 8. *Se $\mathbb{E}\colon\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a>b>0$ e $c=\sqrt{a^2-b^2}$, as diretrizes de $\mathbb{E}$ são $r_1\colon x+\frac{a^2}{c}=0$ e $r_2\colon x-\frac{a^2}{c}=0$.* □

Exercício 42. *Uma matemática aceitou um cargo numa nova Universidade situada a 6km da margem retilínea de um rio. A professora deseja construir uma casa que esteja a uma distância à Universidade igual à metade da distância até a margem do rio. Os possíveis locais satisfazendo esta condição pertencem a uma curva. Determine esta curva e sua equação em relação a algum sistema (cartesiano) à sua escolha.*

Exercício 43. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse de parâmetros geométricos a, b e c. Determine a distância do centro de $\mathbb{E}$ às suas diretrizes.*

Exercício 44. *Seja $\mathbb{E}\colon \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, onde $a > b > 0$ e $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Determine equação para as diretrizes de $\mathbb{E}$.*

Definição 9. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse. Se $P, Q \in \mathbb{E}$ são distintos, dizemos que $\overline{PQ}$ é uma **corda de** $\mathbb{E}$. Se uma corda de $\mathbb{E}$ passa por algum dos focos, então é chamada de **corda focal**.*

Exercício 45. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse ou uma circunferência. Mostre que toda reta passando pelo centro de $\mathbb{E}$ a encontra exatamente duas vezes.*

Lema 32. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse. Toda reta passando por um dos focos de $\mathbb{E}$ a encontra exatamente duas vezes.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas com origem no centro de $\mathbb{E}$ e tal a reta focal seja horizontal. Logo $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > b > 0$ com $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Logo $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

Fixemos $\vec{v} = (p, q) \neq \vec{0}$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$F_1 + \lambda\vec{v} \in \mathbb{E} \Leftrightarrow \frac{(-c+\lambda p)^2}{a^2} + \frac{(\lambda q)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2 - \left(\frac{2pc}{a^2}\right)\lambda + \frac{c^2}{a^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2 - \left(\frac{2pc}{a^2}\right)\lambda - \frac{b^2}{a^2} = 0 \; .$$

Esta equação, por sua vez, tem duas raízes distintas pois seu discriminante

$$\Delta = \frac{4p^2c^2}{a^4} + \frac{4b^2}{a^2}\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right) = \frac{4p^2(c^2 + b^2)}{a^4} + \frac{4q^2}{a^2} = \frac{4(p^2 + q^2)}{a^2} = \frac{4\|\vec{v}\|^2}{a^2} > 0 \; .$$

Sendo assim, se r é reta que passa por F_1, então $r \cap \mathbb{E}$ tem exatamente dois elementos. Analogamente prova-se o mesmo para as retas que passam por F_2. □

Proposição 33. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse. Para cada foco de $\mathbb{E}$ existe uma corda focal de comprimento mínimo e esta é perpendicular à reta focal.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas com origem no centro de $\mathbb{E}$ e tal a reta focal seja horizontal. Logo $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > b > 0$ com $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Logo $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

Seja $\vec{v} = (p, q) \neq \vec{0}$. Usando os mesmos argumentos da demonstração do lema anterior, a equação $\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2 - \left(\frac{2pc}{a^2}\right)\lambda - \frac{b^2}{a^2} = 0$ tem discriminante $\Delta = \frac{4\|\vec{v}\|^2}{a^2} > 0$ e, sendo assim, a tem duas soluções distintas. Sejam λ_1 e λ_2 estas duas soluções e ainda $X_1 = F_1 + \lambda_1\vec{v}$ e $X_2 = F_1 + \lambda_2\vec{v}$. Daí X_1 e X_2 determinam uma corda focal. Lembramos que $|\lambda_1 - \lambda_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}}$. Dado que $\overrightarrow{X_1X_2} = \overrightarrow{X_1F_1} + \overrightarrow{F_1X_2} = \lambda_2\vec{v} - \lambda_1\vec{v} = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{v}$, deduzimos que

$$d(X_1, X_2) = |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \|\vec{v}\| = \frac{2\|\vec{v}\|^2}{a\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)} = \frac{2(p^2 + q^2)}{a\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)} \; .$$

Observamos que

$$\frac{p^2 + q^2}{a^2} \leq \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \leq \frac{p^2 + q^2}{b^2} \quad \Leftrightarrow \quad b^2 \leq \frac{p^2 + q^2}{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}} \leq a^2 \; .$$

Logo $\frac{2b^2}{a} \leq d(X_1, X_2) \leq 2a$. Ainda,

$$d(X_1, X_2) = \frac{2b^2}{a} \Leftrightarrow \frac{2b^2}{a} = \frac{2(p^2+q^2)}{a\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)} \Leftrightarrow b^2\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right) = p^2 + q^2 \Leftrightarrow p = 0 \Leftrightarrow \vec{v}//(0, 1).$$

Concluímos que a corda $\overline{X_1X_2}$ tem comprimento mínimo se, e somente se, é vertical.

Para o foco F_2 os argumentos são análogos e o resultado é o mesmo. □

Definição 10. *Cada corda focal de uma elipse de comprimento mínimo é chamada de* **latus rectum***.*

Exercício 46. *Determine fórmula para o comprimento dos* **latera recta** *de uma elipse.*

Exercício 47. *Determine equação para a elipse de focos $F_1 = (-4, -2)$ e $F_2 = (-4, -6)$ e latus rectum de medida 6.*

Proposição 34. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse ou uma circunferência. Se $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_3A_4}$ são cordas de $\mathbb{E}$, paralelas e distintas, então a reta determinada pelos seus pontos médios passa pelo centro de $\mathbb{E}$.*

Demonstração. Podemos fixar um sistema de coordenadas (x, y) com origem no centro de $\mathbb{E}$ e tal que $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a \geq b > 0$. Sejam $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, $A_3 = (x_3, y_3)$ e $A_4 = (x_4, y_4)$. Dado que $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_3A_4}$ são cordas de $\mathbb{E}$ paralelas, podemos fixar $\vec{v} = (p, q) \neq \vec{0}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ambos não nulos, tais que $\overrightarrow{A_1A_2} = \lambda\vec{v}$ e $\overrightarrow{A_3A_4} = \mu\vec{v}$. Observamos que

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 = \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \Rightarrow 0 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = \frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{a^2} + \frac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{b^2} = \frac{\lambda p(x_2+x_1)}{a^2} + \frac{\lambda q(y_2+y_1)}{b^2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{p(x_1+x_2)}{a^2} + \frac{q(y_1+y_2)}{b^2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \bullet \vec{u} = 0 \ ,$$

onde $\vec{u} = \left(\frac{p}{a^2}, \frac{q}{b^2}\right)$. Se M_1 é o ponto médio da corda $\overline{A_1A_2}$, então $\overrightarrow{OM_1} \perp \vec{u}$. Analogamente, prova-se que, se M_2 é o ponto médio da corda $\overline{A_3A_4}$, então $\overrightarrow{OM_2} \perp \vec{u}$. Sendo assim, $\overrightarrow{OM_1}$ e $\overrightarrow{OM_2}$ são paralelos. Consequentemente, O, M_1 e M_2 são colineares. □

Teorema 35. *Toda reta encontra uma elipse ou uma circunferência no máximo duas vezes.* □

Demonstração. Seja $\mathbb{E}$ uma elipse ou um circunferênca e fixemos um sistema de coordenadas tal que $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a \geq b > 0$. Seja r uma reta para passa por $X_0 = (x_0, y_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (p, q) \neq \vec{0}$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, observamos que

$$X_0 + \lambda\vec{v} \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{(x_0+p\lambda)^2}{a^2} + \frac{(y_0+q\lambda)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2+2px_0\lambda+p^2\lambda^2}{a^2} + \frac{y_0^2+2qy_0\lambda+q^2\lambda^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2 + 2\left(\frac{px_0}{a^2} + \frac{qy_0}{b^2}\right)\lambda + \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) = 0 \ .$$

Dado que $\vec{v} \neq \vec{0}$, o número $\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}$ nunca é nulo. Portanto esta equação é de fato uma equação do 2º.grau e tem no máximo duas soluções reais. Sendo assim, $r \cap \mathbb{E}$ tem no máximo dois elementos. □

Consequentemente, **não** há três pontos colineares em uma elipse, nem em uma circunferência.

Teorema 36. *Os únicos eixos de simetria de uma elipse são as retas suportes dos eixos maior e menor.*

Demonstração. Seja $\mathbb{E}$ uma elipse e suponhamos que r é um eixo de simetria para $\mathbb{E}$. Para cada ponto X, seja X' o simétrico de X com relação à reta r. Uma vez que $r \cap \mathbb{E}$ tem no máximo dois elementos e que $\mathbb{E}$ tem infinitos elementos, podemos fixar $P \in \mathbb{E}\backslash r = \mathbb{E}\backslash(\mathbb{E}\cap r)$. Caso $P = P'$, teríamos $P \in r$, o que não acontece. Logo $P \neq P'$ e determinam corda de $\mathbb{E}$. Fixemos $Q \in \mathbb{E} \setminus (r \cup \{P, P'\})$. Analogamente, $Q \neq Q'$ e também determinam corda de $\mathbb{E}$. Se $Q' = P'$ ou $Q' = P$, então $Q = P$ ou $Q = P'$, algo que não acontece. Portanto $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são cordas distintas. Como ambas são perpendiculares a r, $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são segmentos paralelos. Pela proposição 34, seus pontos médios e o centro de $\mathbb{E}$ são colineares. Como estes pontos médios estão em r, o centro de $\mathbb{E}$ pertence a r.

Fixemos um sistema de coordenadas tal que $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > b > 0$. Naturalmente, $(0,0)$ é o centro de $\mathbb{E}$. Ainda, $r\colon \alpha x + \beta y = 0$, para $\vec{n} = (\alpha, \beta) \neq \vec{0}$. Como a reta $y = 0$ é eixo de simentria para $\mathbb{E}$, podemos supor que r não é horizontal, ou seja, que $\alpha \neq 0$. O vértice $A = (a, 0) \in \mathbb{E}$ e $A' \in \mathbb{E}$. Como o segmento $\overline{AA'}$ é perpendicular a r e o seu ponto médio pertence a r, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A + \lambda\vec{n} \in r$ e $A + 2\lambda\vec{n} = A' \in \mathbb{E}$. Mas

$$A + \lambda\vec{n} \in r \Leftrightarrow \alpha(a + \lambda\alpha) + \beta^2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-\alpha a}{\alpha^2 + \beta^2} \ .$$

Por sua vez, dado que $\lambda \neq 0$,

$$A + 2\lambda\vec{n} \in \mathbb{E} \Leftrightarrow \frac{(a+2\alpha\lambda)^2}{a^2} + \frac{(2\beta\lambda)}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2+4a\alpha\lambda+4\alpha^2\lambda^2}{a^2} + \frac{4\beta^2\lambda^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-\frac{\alpha}{a}}{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}} \ .$$

Por outro lado,

$$\frac{-\alpha a}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{-\frac{\alpha}{a}}{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}} \Leftrightarrow a^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right) = \alpha^2+\beta^2 \Leftrightarrow \frac{a^2\beta^2}{b^2} = \beta^2 \Leftrightarrow \beta = 0 \ ,$$

pois $a^2 \neq b^2$. Sendo assim, r é vertical. □

Exercício 48. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma circunferência de centro* C*. Se* r *é uma reta, mostre que* r *é eixo de simetria para* $\mathbf{C}$ *se, e somente se,* r *passa por* C*.*

Teorema 37. *Sejam* Γ *uma elipse ou uma circunferência e* $X_0 \in \Gamma$*. Existe uma única reta* t *tal que* $t \cap \Gamma = \{X_0\}$*.*

Demonstração. Seja Γ uma elipse ou um circunferênca e fixemos um sistema de coordenadas tal que $\Gamma\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a \geq b > 0$. Seja r uma reta para passa por $X_0 = (x_0, y_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (p,q) \neq \vec{0}$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, observamos que

$$X_0 + \lambda\vec{v} \in \Gamma \Leftrightarrow \left(\tfrac{p^2}{a^2}+\tfrac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2 + 2\left(\tfrac{px_0}{a^2}+\tfrac{qy_0}{b^2}\right)\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \ \lambda = -2\left(\frac{\frac{px_0}{a^2}+\frac{qy_0}{b^2}}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}\right) .$$

A solução $\lambda = 0$, corresponde ao ponto X_0, que é elemento de $\Gamma \cap r$. Portanto, $\Gamma \cap r$ é unitário se, e somente se, $\frac{px_0}{a^2}+\frac{qy_0}{b^2} = 0$. Dado que $X_0 \in \Gamma$, os vetores $\vec{n} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$ e $\vec{u} = \vec{n}^{\perp} = \left(-\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2}\right)$ são ambos não nulos. Portanto,

$$\Gamma \cap r = \{X_0\} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} /\!/ \vec{u} \ .$$

Concluímos que a reta t, que passa por X_0 e é paralela ao vetor $\vec{u}$, é a única reta que encontra Γ uma única vez no ponto X_0. □

Definição 11. *Sejam* Γ *uma elipe ou uma circunferência e* $X_0 \in \Gamma$*. A* ***reta tangente a*** Γ ***no ponto*** X_0 *é a reta que passa por* X_0 *e tem interseção unitária com* Γ*. A* ***reta normal a*** Γ ***no ponto*** X_0 *é a reta que passa por* X_0 *e é perpendicular à reta tangente no mesmo ponto* X_0*.*

Corolário 9. *Se* $\Gamma\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$*, onde* $a \geq b > 0$ *e* $X_0 = (x_0,y_0) \in \Gamma$*, então a reta tangente a* Γ *em* X_0 *tem equação* $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$*.*

Demonstração. Pela demonstração do teorema 37, a reta tangente é perpendicular ao vetor $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$. Uma vez que passa por X_0, uma equação para a reta tangente é $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right) \bullet (x-x_0, y-y_0) = 0$. Mas

$$\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right) \bullet (x-x_0,y-y_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2} = 1 \ ,$$

pois que $X_0 \in \Gamma$. □

Teorema 38. *Seja* $\mathbb{E}$ *uma elipse de focos* F_1 *e* F_2*. Se* $X_0 \in \mathbb{E}$ *e* $\vec{n_0}$ *é vetor perpendicular à reta tangente a* $\mathbb{E}$ *em* X_0*, então* $\operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F_1}, \vec{n_0}) = \operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F_2}, \vec{n_0})$

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas tal que $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a > b > 0$. Se $c = \sqrt{a^2-b^2}$, então, sem perda de genaralidade, podemos escrever $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Se $X_0 = (x_0, y_0)$, então $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$. Se $\vec{n_0}$ é vetor perpendicular à reta tangente a $\mathbb{E}$ em X_0, então $\vec{n_0} = \lambda\vec{n}$, onde $\vec{n} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é não nulo. Pela proposição 24, $\|\overrightarrow{X_0F_1}\| = a + \frac{cx_0}{a} = \frac{a^2+cx_0}{a}$. Observamos que

$$\overrightarrow{X_0F_1} \bullet \vec{n} = (-c-x_0, -y_0) \bullet \vec{n} = \frac{-x_0(c+x_0)}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{-x_0c}{a^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right) = -\left(\frac{cx_0}{a^2}+1\right) = -\frac{\|\overrightarrow{X_0F_1}\|}{a} \ .$$

Se $\theta_1 = \operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F_1}, \vec{n_0})$, então

$$\cos\theta_1 = \frac{\overrightarrow{X_0F_1} \bullet \vec{n_0}}{\|\overrightarrow{X_0F_1}\| \cdot \|\vec{n_0}\|} = \frac{\overrightarrow{X_0F_1} \bullet (\lambda\vec{n})}{\|\overrightarrow{X_0F_1}\| \cdot |\lambda| \cdot \|\vec{n}\|} = \frac{-|\lambda|}{a\lambda\|\vec{n}\|} \ .$$

Analogamente, concluímos que $\overrightarrow{X_0F_2} \bullet \vec{n} = -\frac{\|\overrightarrow{X_0F_2}\|}{a}$. Logo, se $\theta_2 = \operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F_2}, \vec{n_0})$, então $\cos\theta_2 = \frac{-|\lambda|}{a\lambda\|\vec{n}\|}$. Sendo assim, $\operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F_1}, \vec{n_0}) = \operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F_2}, \vec{n_0})$ □

Este último resultado mostra que, se um raio de luz é emitido de um foco de uma elipse, ele se refletirá nela e incidirá no outro foco.

Exercício 49. *Obtenha equação das retas tangente e normal à cônica no ponto P.*

(1) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ *e* $P = (1, 1)$

(2) $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 32 = 0$ *e* $P = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$

Exercício 50. *Determine as retas tangente à circunferência* $\mathbf{C}\colon x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$*, que passam pelo ponto* $P = (1, 0)$*.*

8. Hipérboles

Sejam F_1 e F_2 pontos distintos e uma constante a tal que $0 < a < \frac{d(F_1,F_2)}{2}$. A **hipérbole de focos F_1 e F_2 e parâmetro** a é a curva determinada pelos pontos cujo módulo da diferença das distâncias aos focos é $2a$. Se $\mathbb{H}$ é a hipérbole determinada por F_1, F_2 e a, então, para o ponto X,

$$X \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad |d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a.$$

Seja C o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. Suponhamos que $X \in \mathbb{H}$ e seja Y o simétrico de X com relação a C. Sendo assim, $\overrightarrow{YC} = \overrightarrow{CX}$,

$$\overrightarrow{YF_2} = \overrightarrow{YC} + \overrightarrow{CF_2} = \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{F_1C} = \overrightarrow{F_1X} \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{YF_1} = \overrightarrow{YC} + \overrightarrow{CF_1} = \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{F_2C} = \overrightarrow{F_2X}.$$

Portanto

$$d(Y, F_1) - d(Y, F_2) = d(X, F_2) - d(X, F_1) = 2a\ .$$

Ou seja, $Y \in \mathbb{H}$.

Definição 12. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de focos F_1 e F_2. O segmento $\overline{F_1F_2}$ é chamado de* ***segmento focal****, enquanto a* ***reta focal*** *é a reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$. O ponto médio do segmento focal é chamado de* ***centro de*** *$\mathbb{H}$. A* ***distância focal*** *é o número $d(F_1, F_2)$. Se $X \in \mathbb{H}$, os* ***raios focais de*** *X são as distâncias de X aos focos de $\mathbb{H}$.*

Provamos acima que a hipérbole é **simétrica** com relação ao seu centro.

Definição 13. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de focos F_1 e F_2. Os conjuntos*

$$\mathbb{H}_1 = \{P \in \mathbb{H}\colon d(P, F_1) < d(P, F_2)\} \quad \text{e} \quad \mathbb{H}_2 = \{P \in \mathbb{H}\colon d(P, F_2) < d(P, F_1)\}$$

são chamados de ***ramos da hipérbole*** *$\mathbb{H}$.*

Observamos que $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_2$ e que $\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 = \emptyset$. Ainda, se P é ponto do plano e Q é o simétrico de P com relação a C, então $P \in \mathbb{H}_1$ se, e somente, $Q \in \mathbb{H}_2$, por causa da discussão feita acima.

Fixemos um sistema de coordenadas no qual a reta focal seja horizontal. Portanto $C = (h, k)$. Dado que $\overrightarrow{CF_1} = -\overrightarrow{CF_2}$, que são ambos paralelos a $\overleftrightarrow{F_1F_2}$, podemos fixar $\overrightarrow{CF_2} = (c, 0)$, com $c > 0$. Daí $F_2 = C + \overrightarrow{CF_2} = (h + c, k)$ e $F_1 = C - \overrightarrow{CF_2} = (h - c, k)$. Como $d(F_1, F_2) = 2c$, deduzimos que $0 < a < c$. Se $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, então $c > b > 0$ e $c^2 = a^2 + b^2$. Os números a, b e c são chamados de **parâmetros geométricos** da hipérbole. Quando os números a e b são iguais, diremos que a hipérbole é **equilátera**.

Procuremos agora uma equação para a hipérbole $\mathbb{H}$ nas condições acima. Para $X = (x, y)$, sejam $u = x - h$ e $v = y - k$. Logo

$$\begin{aligned}
X \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad & \left|\sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2}\right| = 2a \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \left|\sqrt{(u+c)^2 + v^2} - \sqrt{(u-c)^2 + v^2}\right| = 2a \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \left|\sqrt{\big(u^2 + c^2 + v^2\big) + 2cu} - \sqrt{\big(u^2 + c^2 + v^2\big) - 2cu}\right| = 2a \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 2\big(u^2 + c^2 + v^2\big) - 2\sqrt{\big(u^2 + c^2 + v^2\big)^2 - 4c^2u^2} = 4a^2 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sqrt{\big(u^2 + c^2 + v^2\big)^2 - 4c^2u^2} = \big(u^2 + c^2 + v^2\big) - 2a^2 \quad \Longrightarrow \\
& \Longrightarrow \big(u^2 + c^2 + v^2\big)^2 - 4c^2u^2 = \Big(\big(u^2 + c^2 + v^2\big) - 2a^2\Big)^2 \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -4c^2u^2 = -4a^2\left(u^2 + c^2 + v^2\right) + 4a^4 \quad \Leftrightarrow \quad a^2\left(u^2 + c^2 + v^2\right) - c^2u^2 = a^4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -b^2u^2 + a^2v^2 = (a^2 - c^2)u^2 + a^2v^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2) - a^2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \ .$$

Acabamos de mostrar que, se $X \in \mathbb{H}$, então $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. A proposição a seguir vai mostrar a recíproca, o que finaliza a procura por alguma equação da hipérbole $\mathbb{H}$.

Proposição 39. *Nas mesmas condições da discussão feita até este instante, se $X = (x, y)$ é um ponto do plano que satisfaz a equação $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, então $d(X, F_1) = \left|\frac{c(x-h)}{a} + a\right|$ e $d(X, F_2) = \left|\frac{c(x-h)}{a} - a\right|$. Além disso, X pertence à hipérbole $\mathbb{H}$.*

Demonstração. Fixemos $X = (x, y)$ nas condições da hipótese. Daí $(y-k)^2 = -b^2 + \frac{b^2(x-h)^2}{a^2}$ e

$$\Big(d(X, F_1)\Big)^2 = (x-h+c)^2 + (y-k)^2 = (x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 - b^2 + \frac{b^2(x-h)^2}{a^2} =$$
$$= (x-h)^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + 2c(x-h) + a^2 = \frac{c^2(x-h)^2}{a^2} + 2c(x-h) + a^2 = \left(\frac{c(x-h)}{a} + a\right)^2 .$$

Ou seja, $d(X, F_1) = \left|\frac{c(x-h)}{a} + a\right|$. Analogamente, induzimos que $d(X, F_2) = \left|\frac{c(x-h)}{a} - a\right|$. Como $\frac{(x-h)^2}{a^2} = 1 + \frac{(y-k)^2}{b^2} \geq 1$, deduzimos que $\frac{c^2(x-h)^2}{a^2} \geq c^2 > a^2$ e $\left(\frac{c(x-h)}{a} - a\right)\left(\frac{c(x-h)}{a} + a\right) > 0$. Ou seja, os números $\left(\frac{c(x-h)}{a} - a\right)$ e $\left(\frac{c(x-h)}{a} + a\right)$ têm mesmo sinal. Se ambos são positivos, então $d(X, F_1) - d(X, F_2) = 2a$. Caso ambos sejam negativos, então $d(X, F_1) - d(X, F_2) = -2a$. Em qualquer situação, $\big|d(X, F_1) - d(X, F_2)\big| = 2a$ e $X \in \mathbb{H}$. □

Portanto fica demonstrado o teorema:

Teorema 40. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $c > a > 0$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Dados os pontos $C = (h, k)$, $F_1 = (h-c, k)$ e $F_2 = (h+c, k)$, seja $\mathbb{H}$ a hipérbole de focos F_1 e F_2 e parâmetro a. Para um ponto $X = (x, y)$,*

$$X \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \ .$$

□

Corolário 10. *Nas condições do teorema anterior, se $\mathbb{H}_1 = \{P \in \mathbb{H} \colon d(P, F_1) < d(P, F_2)\}$ e $\mathbb{H}_2 = \{P \in \mathbb{H} \colon d(P, F_2) < d(P, F_1)\}$ são os ramos de $\mathbb{H}$, então $\mathbb{H}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{H} \colon x \leq h - a\}$, enquanto $\mathbb{H}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{H} \colon x \geq h + a\}$.*

Demonstração. Fixemos $X = (x, y) \in \mathbb{H}$ tal que $x \leq h - a$. Logo $\frac{(x-h)}{a} \leq -1$, $\frac{c(x-h)}{a} \leq -c \leq -a < a$. Daí, pela proposição 24,

$$d(X, F_1) = -a - \frac{c(x-h)}{a} \qquad \text{e} \qquad d(X, F_2) = a - \frac{c(x-h)}{a} \ .$$

Consequentemente, $d(X, F_1) < d(X, F_2)$ e $X \in \mathbb{H}_1$.

Acabamos por provar que $\{(x, y) \in \mathbb{H} \colon x \leq h - a\} \subseteq \mathbb{H}_1$. Analogamente, é possível mostrar que $\{(x, y) \in \mathbb{H} \colon x \geq h + a\} \subseteq \mathbb{H}_2$. Agora, tomemos $Y = (x, y) \in \mathbb{H}_1$. Dado que $\frac{(x-h)^2}{a^2} \geq 1$, então $|x - h| \geq a$. Como $Y \notin \mathbb{H}_2$, então $x - h \leq -a$, ou seja, $x \leq h - a$. Concluímos que $\mathbb{H}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{H} \colon x \leq h - a\}$. Por argumentos análogos, deduzimos que $\mathbb{H}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{H} \colon x \geq h + a\}$. □

Exercício 51. *Nas condições do teorema anterior, sejam $X_1, X_2 \in \mathbb{H}$. Mostre que, se $X_1 = (x_1, y_1)$ e $X_2 = (x_2, y_2)$, então X_1 e X_2 estão no mesmo ramo de $\mathbb{H}$ se, e somente se, $(x_1 - h)(x_2 - h) > 0$.*

Corolário 11. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $c > a > 0$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Dados os pontos $C = (h, k)$, $F_1 = (h, k-c)$ e $F_2 = (h, k+c)$, seja $\mathbb{H}$ a hipérbole de focos F_1 e F_2 e parâmetro a. Para um ponto $X = (x, y)$,*

$$X \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \ .$$

Demonstração. Primeiro tomemos a translação $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$. Logo $C = (0,0)$, $F_1 = (0,-c)$ e $F_2 = (0,c)$, no sistema (u,v). Rotacionemos os eixos de (u,v) por $\frac{\pi}{2}$, ou seja, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$. Daí $C = (0,0)$, $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$ no sistema (t,w). Pelo teorema anterior:

$$X = (t,w) \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2}{a^2} - \frac{w^2}{b^2} = 1 \ .$$

Uma vez que $\begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, deduzimos que $\mathbb{H}$: $\frac{v^2}{a^2} - \frac{u^2}{b^2} = 1$. Finalmente, no sistema (x,y):

$$X = (x,y) \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \ .$$

□

Exercício 52. *Tomando como exemplo o corolário 10, descreva os ramos de $\mathbb{H}$ nas condições do corolário anterior.*

Uma consequência imediata destes dois últimos resultados é que toda hipérbole com reta focal paralela a um dos eixos coordenados tem **equação de 2º.grau sem termo misto**. Se a reta focal é horizontal, então o "sinal negativo" aparece no termo de 2º.grau na segunda coordenada; enquanto no caso em que a reta focal é vertical, o "sinal negativo" aparece no termo de 2º.grau na primeira coordenada. O parâmetro a sempre acompanha o termo de "sinal positivo".

Teorema 41. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de centro C e parâmetros geométricos a, b e c. Para todo $X \in \mathbb{H}$, $d(X,C) \geq a$.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas (x,y) com origem em C e tal que a reta focal seja horizontal. Daí $C = (0,0)$ e $\mathbb{H}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Para $X = (x,y) \in \mathbb{H}$,

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \geq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Portanto $x^2 + y^2 \geq a^2$ e, consequentemente, $d(X,C) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq a$. □

Corolário 12. *Nas mesmas condições do teorema anterior, existem $A_1, A_2 \in \mathbb{H}$, simétricos com relação a C, tal que, para $X \in \mathbb{H}$, $d(X,C) = a$ se, e somente se, $X = A_1$ ou $X = A_2$. Ademais, A_1 e A_2 estão na reta focal.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas (x,y) com origem em C e tal que a reta focal seja horizontal. Daí $C = (0,0)$ e $\mathbb{H}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sejam $A_2 = (a,0)$ e $A_1 = (-a,0)$. Logo deduzimos que C é ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$ e que os dois pontos estão no eixo focal, que é a reta $y = 0$. Também é imediato que A_1 e A_2 são pontos de $\mathbb{H}$ e que $d(A_1,C) = d(A_2,C) = a$. Suponhamos $X = (x,y) \in \mathbb{H}$ tal que $d(X,C) = a$. Logo

$$1 = \frac{x^2 + y^2}{a^2} \geq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Sendo asssim, $\frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ e $y = 0$. Consequentemente, $x = a$ ou $x = -a$. □

Definição 14. *Os pontos A_1 e A_2 do corolário anterior são chamados de **vértices da hipérbole**. O segmento $\overline{A_1A_2}$ é chamado de **eixo transverso (ou real) da hipérbole**.*

Exercício 53. *Determine fórmula para as distâncias dos vértices de uma hipérbole aos seus focos.*

Exercício 54. *Mostre que todo ramo de qualquer hipérbole é **conjunto ilimitado e infinito**.*

Proposição 42. *Nas mesmas condições do teorema anterior, existem B_1, B_2, pontos distintos e simétricos com relação a C, tais que B_1 e B_2 juntamente com os vértices de $\mathbb{H}$, determinam um losango com lados medindo c.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas (x,y) com origem em C e tal que a reta focal seja horizontal. Daí $C = (0,0)$ e $\mathbb{H}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sejam $B_2 = (0,b)$ e $B_1 = (0,-b)$. Os vértices de $\mathbb{H}$ são $A_2 = (a,0)$ e $A_1 = (-a,0)$. Visto que $c^2 = a^2 + b^2$, $A_1B_1A_2B_2$ é um losango cujos lados medem c. □

Definição 15. *O segmento $\overline{B_1B_2}$ é chamado de **eixo conjugado (ou imaginário) da hipérbole**.*

Vale observar que os eixos transverso e conjugado de uma hipérbole são perpendiculares entre si e compartilham do mesmo ponto médio, que é o centro da hipérbole.

Definição 16. *Seja a hipérbole* $\mathbb{H}\colon \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$*. As retas* $\left(\frac{x-h}{a}\right) - \left(\frac{y-k}{b}\right) = 0$ *e* $\left(\frac{x-h}{a}\right) + \left(\frac{y-k}{b}\right) = 0$ *são chamadas de **assíntotas de*** $\mathbb{H}$*.*

É possível mostrar que os pontos da hipérbole se aproximam das assíntotas conforme se afastam do centro da hipérbole. Nota-se também que as assíntotas não encontram a hipérbole e são retas concorrentes no centro dela.

Exercício 55. *Mostre que as retas suportes dos eixos transverso e conjugado são eixos de simetria para uma hipérbole.*

Exercício 56. *Determinar os focos, os vértices, o centro, os parâmetros e as assíntotas de cada uma das **hipérboles** abaixo:*

(1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

(2) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$

(3) $x^2 - 9y^2 = 1$

(4) $y^2 - x^2 = 2$

(5) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$

(6) $x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 31 = 0$

(7) $25x^2 - 4y^2 + 40y = 0$

(8) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$

Exercício 57. *Sejam* $\mathbb{H}$ *uma hipérbole tal que* $\mathbb{H}\colon \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$*, onde* $a > 0$ *e* $b > 0$*, e* r *uma reta paralela ao vetor não nulo* $\vec{v} = (p, q)$*. Mostre que* r *é paralela a alguma das assíntotas de* $\mathbb{H}$ *se, e somente se,* $\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} = 0$*.*

Exercício 58. *Seja* $\mathbb{H}$ *uma hipérbole de parâmetros geométricos* a, b *e* c*. Mostre que o produto das distâncias de um ponto de* $\mathbb{H}$ *às assíntotas é uma constante. Determine essa constante.*

Exercício 59. *As assíntotas de uma hipérbole determinam quatro ângulos. Mostre que a reta focal desta hipérbole contem duas das bissetrizes destes ângulos.*

Teorema 43. *Toda hipérbole admite equação* $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + dx + ey + f = 0$*, onde* $\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{vmatrix} < 0$ *e* $\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \neq 0$*.*

Demonstração. Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de centro $C = (h, k)$ e parâmetros a, b e c. Aplicando a translação $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$, obtemos que $C = (0, 0)$, no sistema (u, v). Usemos uma rotação $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$ que deixa a reta focal horizontal. Pelo teorema 40, $\mathbb{H}\colon \frac{t^2}{a^2} - \frac{w^2}{b^2} = 1$, no sistema (t, w). Mas

$$\frac{t^2}{a^2} - \frac{w^2}{b^2} = \begin{pmatrix} t & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix}$, para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, dado que é matriz simétrica. Logo, no sistema (u, v), $\mathbb{H}\colon \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 - 1 = 0$. Pela proposição 7, deduzimos que as matrizes $\begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$ têm mesmo determinante. Sendo assim, $\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2b^2} < 0$.

No sistema original, $\mathbb{H}\colon \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + dx + ey + f = 0$, e, pela proposição 2,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & 0 \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2} \neq 0\,,$$

o qual conclui a tese do teorema. $\square$

Agora vejamos uma recíproca para o teorema anterior.

Teorema 44. *Seja* $\Gamma\colon \alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+dx+ey+f=0$ *uma cônica onde* $\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma\end{vmatrix}<0$ *e* $\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}\neq 0.$

Então Γ *representa uma hipérbole.*

Demonstração. Dado que $\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}\neq 0$, existem únicos $h,k\in\mathbb{R}$ tais que

$$\begin{pmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ .$$

Logo a translação $\begin{cases}x=u+h\\ y=v+k\end{cases}$ anula os coeficientes dos termos de 1°.grau. Por conseguinte, no sistema (u,v), $\Gamma\colon \alpha u^2+\beta uv+\gamma v^2+f'=0$, para algum $f'\in\mathbb{R}$. Pela proposição 2,

$$0\neq\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & 0\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & 0\\ 0 & 0 & f'\end{vmatrix}=\left(\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)f'\ ,$$

e consequentemente $f'\neq 0$.

Tomemos uma rotação $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\w\end{pmatrix}$ que elimina o termo misto. Sendo assim, no sistema (t,w), $\Gamma\colon \delta t^2+\epsilon w^2+f'=0$, para $\delta,\epsilon\in\mathbb{R}$, satisfazendo $\delta+\epsilon=\alpha+\gamma$ e $\delta\epsilon=\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}$, pela proposição 7. Portanto $\delta\epsilon<0$, $\frac{\delta\epsilon}{(f')^2}<0$ e os números $\frac{\delta}{f'}$ e $\frac{\epsilon}{f'}$ têm sinais contrários. Podemos escrever $\Gamma\colon -\left(\frac{\delta}{f'}\right)t^2-\left(\frac{\epsilon}{f'}\right)w^2=1$. Se $\frac{\delta}{f'}>0$, então $\frac{\epsilon}{f'}<0$. Sejam $\lambda=\sqrt{\frac{f'}{\delta}}$ e $\mu=\sqrt{-\frac{f'}{\epsilon}}$. Logo $\Gamma\colon \frac{t^2}{\lambda^2}-\frac{w^2}{\mu^2}=1$ é uma hipérbole. O mesmo acontece se $\frac{\delta}{f'}<0$. □

Teorema 45. *Seja* $\Gamma\colon \alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+dx+ey+f=0$ *uma cônica onde* $\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma\end{vmatrix}<0$ *e* $\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=0.$

Então Γ *representa a união de duas retas concorrentes.*

Demonstração. Dado que $\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}\neq 0$, existem únicos $h,k\in\mathbb{R}$ tais que

$$\begin{pmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ .$$

Logo a translação $\begin{cases}x=u+h\\ y=v+k\end{cases}$ anula os coeficientes dos termos de 1°.grau. Por conseguinte, no sistema (u,v), $\Gamma\colon \alpha u^2+\beta uv+\gamma v^2+f'=0$, para algum $f'\in\mathbb{R}$. Pela proposição 2,

$$0=\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & 0\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & 0\\ 0 & 0 & f'\end{vmatrix}=\left(\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)f'\ ,$$

e consequentemente $f'=0$.

Tomemos uma rotação $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\w\end{pmatrix}$ que elimina o termo misto. Sendo assim, no sistema (t,w), $\Gamma\colon \delta t^2+\epsilon w^2=0$, para $\delta,\epsilon\in\mathbb{R}$, satisfazendo $\delta+\epsilon=\alpha+\gamma$ e $\delta\epsilon=\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}$, pela proposição 7. Portanto $\delta\epsilon<0$ e δ e seja $\sigma=\sqrt{-\delta\epsilon}$. Logo

$$\delta t^2+\epsilon w^2=0\Leftrightarrow 0=\delta^2t^2-\sigma^2w^2=(\delta t-\sigma w)(\delta t+\sigma w)\quad\Leftrightarrow\quad \delta t-\sigma w=0 \text{ ou } \delta t+\sigma w=0\ .$$

Concluímos que Γ representa a união de duas retas concorrentes na origem do sistema (t,w), ou seja, duas retas concorrentes no ponto (h,k) no sistema original. □

Observação 3. *Nas condições do teorema, a translação, que elimina os termos de 1º.grau, determina o centro de hipérbole ou o ponto de encontro das duas retas concorrentes.*

Exemplo 5. *A demonstração do teorema nos deu um roteiro de como determinar qual cônica a equação ela representa: efetuar um translação e depois uma rotação!*

Por exemplo, seja $\Gamma\colon (x+1)(y-2)=1$. *Depois da translação* $\begin{cases} x = u-1 \\ y = v+2 \end{cases}$, *obtemos* $\Gamma\colon uv = 1$.

Para a rotação, estudemos as raízes de $\begin{vmatrix} 0-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4}$, *que são* $\frac{1}{2}$ *e* $-\frac{1}{2}$. *O sistema* $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *tem soluções* $(\alpha,\beta)//(1,1)$. *Depois da rotação* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$, *chegamos a* $\Gamma\colon \frac{t^2}{2} - \frac{w^2}{2} = 1$, *que é uma* ***hipérbole de reta focal horizontal*** *com parâmetros* $a = b = \sqrt{2}$ *e* $c = 2$. *A seguir colocamos as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices nos diferentes sistemas:*

	(t,w)	(u,v)	(x,y)
Centro	$(0,0)$	$(0,0)$	$(-1,2)$
Foco	$(-2,0)$	$\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$	$\left(-1-\sqrt{2},2-\sqrt{2}\right)$
Foco	$(2,0)$	$\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$	$\left(-1+\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$
Vértice	$\left(-\sqrt{2},0\right)$	$(-1,-1)$	$(-2,1)$
Vértice	$\left(\sqrt{2},0\right)$	$(1,1)$	$(0,3)$

As retas $t = w$ *e* $t = -w$ *são as assíntotas de* Γ. *Como* $\begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *e* $\begin{cases} u = x+1 \\ v = y-2 \end{cases}$,

$$t = w \Leftrightarrow \tfrac{u+v}{\sqrt{2}} = \tfrac{-u+v}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad e$$
$$t = -w \Leftrightarrow \tfrac{u+v}{\sqrt{2}} = \tfrac{u-v}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow y = 2.$$

Deduzimos que as assíntotas têm equações $x = -1$ *e* $y = 2$ *no sistema* (x,y).

Exercício 60. *Determine os focos, o centro, os vértices, os parâmetros e as assíntotas das hipérbole:*
(1) $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$ *(2)* $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$

Exercício 61. *As cônicas abaixo são união de retas. Determine-as.*
(1) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$ *(3)* $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$
(2) $5x^2 + 27xy - 73x + 10y^2 - 250y + 240 = 0$ *(4)* $x^2 + 4xy + 4y^2 - 1 = 0$

Definição 17. *Seja* $\mathbb{H}$ *de semi-eixo focal medindo* c *e semi-eixo tranverso medindo* a. *A* ***excentricidade de*** $\mathbb{H}$ *é o número* $\frac{c}{a}$.

A excentricidade de uma hipérbole é sempre um real estritamente maior que 1.

Exercício 62. *Determine uma equação de hipérbole equilátera de focos* $F_1 = (1,6)$ *e* $F_2 = (1,-2)$.

Exercício 63. *As assíntotas de uma hipérbole* $\mathbb{H}$ *são perpendiculares e uma delas é paralela à reta* $r\colon x + y = 0$. *Sabendo que* $\mathbb{H}$ *tem eixo focal horizontal e centro* $C = (1,-2)$, *determine equação de* $\mathbb{H}$.

Exercício 64. *Em cada um dos seguintes itens, determine uma equação da hipérbole a partir das informações dadas. Determine os focos, o centro, os vértices, seus parâmetros e suas assíntotas, nos casos onde não houver a informações.*
(1) focos $F_1 = (-1,3)$ *e* $F_2 = (-7,3)$ *e comprimento do eixo transverso igual a 4,*
(2) focos $F_1 = (2,13)$ *e* $F_2 = (2,-13)$ *e comprimento do eixo conjugado igual a 24,*
(3) centro $C = (0,0)$, *um dos focos* $F = (4,4)$ *e um dos vértices* $V = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$,
(4) assíntotas $r\colon 4x + y - 11 = 0$ *e* $s\colon 4x - y - 13 = 0$ *e um dos vértices* $V = (3,1)$,
(5) focos $F_1 = \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ *e* $F_2 = \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ *e parâmetro* $2\sqrt{2}$.

Exercício 65. *Determine uma equação da elipse, com excentricidade* $e = \frac{1}{3}$ *e cujos focos coincidem com os vértices da hipérbole* $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$

Exercício 66. *Da hipérbole* $\mathbb{H}\colon y = \frac{1}{x} - \frac{3x}{4}$, *determine seus focos, seus vértices e suas retas assíntotas.*

9. Retas e Hipérboles

Teorema 46. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de focos F_1 e F_2 e excentricidade e. Existem r_1 e r_2, retas perpendiculares à reta focal, tais que, para o ponto X,*

$$X \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad d(X,F_1) = e \cdot d(X,r_1) \quad \Leftrightarrow \quad d(X,F_2) = e \cdot d(X,r_2)\ .$$

Demonstração. Fixemos um sisema de coordenadas com origem no centro de $\mathbb{H}$ e tal que a reta focal seja horizontal. Logo $\mathbb{H}\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$, $b > 0$, $c = \sqrt{a^2+b^2}$ e $e = \frac{c}{a}$. Ainda $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$. Sejam $r_1\colon x + \frac{a^2}{c} = 0$ e $r_2\colon x - \frac{a^2}{c} = 0$. Naturalmente r_1 e r_2 são verticais e perpendiculares à reta focal. Para $X = (x,y)$,

$$d(X,F_1) = e \cdot d(X,r_1) \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \tfrac{c}{a}\left|x + \tfrac{a^2}{c}\right| \Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = \left(\tfrac{cx}{a} + a\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = \tfrac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2 \Leftrightarrow \left(1 - \tfrac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow -\tfrac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = -b^2$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad X \in \mathbb{H}\ .$$

Analogamente, mostra-se que $d(X,F_2) = e \cdot d(X,r_2)$ se, e somente se, $X \in \mathbb{H}$. □

Definição 18. *As retas r_1 e r_2 do teorema são chamadas de* ***diretrizes da hipérbole****.*

Corolário 13. *Se $\mathbb{H}\colon \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$, $b > 0$ e $c = \sqrt{a^2+b^2}$, então as diretrizes de $\mathbb{H}$ são $r_1\colon x - h + \frac{a^2}{c} = 0$ e $r_2\colon x - h - \frac{a^2}{c} = 0$.* □

Exercício 67. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de parâmetros geométricos a, b e c. Determine a distância do centro de $\mathbb{H}$ às suas diretrizes.*

Exercício 68. *Seja $\mathbb{H}\colon -\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, onde $a > 0$, $b > 0$ e $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Determine equação para as diretrizes de $\mathbb{H}$.*

Definição 19. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole. Se $P, Q \in \mathbb{H}$ são distintos, dizemos que $\overline{PQ}$ é uma* ***corda de $\mathbb{H}$****. Se uma corda de $\mathbb{H}$ passa por algum dos focos, então é chamada de* ***corda focal****.*

Exercício 69. *Encontre o comprimento da(s) corda(s) focal(is) à cônica $\mathbb{H}\colon \frac{(x-1)^2}{2} - y^2 = 1$, que é(são) paralela(s) à reta $x + y = 0$.*

Lema 47. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de centro C. Se r não é reta assíntota mas é paralela a uma das assíntotas, então $r \cap \mathbb{H}$ é conjunto unitário.*

Demonstração. Podemos fixar um sistema de coordenadas (x,y) com origem no centro de $\mathbb{H}$. Daí $\mathbb{H}\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$. As assíntotas de $\mathbb{H}$ são as retas $bx - ay = 0$ e $bx + ay = 0$, portanto são retas paralelas aos vetores (a,b) e $(-a,b)$, respectivamente.

Suponhamos que (a,b) é vetor diretor de r e que r passa pelo ponto $X_0 = (x_0,y_0)$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, observamos que:

$$X_0 + \lambda\vec{v} \in \mathbb{H} \Leftrightarrow \frac{(x_0+\lambda a)^2}{a^2} - \frac{(y_0+\lambda b)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)\lambda + \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) = 0\ .$$

Se $\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} = 0$, então X_0 é ponto da assíntota $bx - ay = 0$, o que é um absurdo pois r é paralela e distinta desta assíntota. Sendo assim, a equação acima admite uma única solução e r encontra $\mathbb{H}$ em um único ponto.

Por argumentos análogos, mostra-se que, se r é paralela à assintota $bx + ay = 0$ mas é distinta dela, então $r \cap \mathbb{H}$ é conjunto unitário. □

Teorema 48. *Uma hipérbole e uma reta se encontram no máximo duas vezes.*

Demonstração. Sejam $\mathbb{H}$ uma hipérbole e r uma reta. Podemos fixar um sistema de coordenadas (x,y) com origem no centro de $\mathbb{H}$. Daí $\mathbb{H}\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$. As assíntotas de $\mathbb{H}$ são as retas $bx - ay = 0$ e $bx + ay = 0$, portanto são retas paralelas aos vetores (a,b) e $(-a,b)$, respectivamente. Seja $\vec{v} = (p,q)$ um vetor diretor de r.

Se r é uma das assíntotas, então $r \cap \mathbb{H} = \emptyset$. Se r não é assíntota mas é paralela a alguma delas, então $r \cap \mathbb{H}$ é unitário, pelo lema anterior. Suponhamos que r não é paralela a nenhumas das assíntotas. Neste caso, $\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} \neq 0$, pelo exercício 57. Seja $X_0 = (x_0,y_0) \in r$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$X_0+\lambda\vec{v}\in\mathbb{H}\Leftrightarrow \tfrac{(x_0+\lambda p)^2}{a^2}-\tfrac{(y_0+\lambda q)^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\left(\tfrac{p^2}{a^2}-\tfrac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2+2\left(\tfrac{x_0p}{a}-\tfrac{y_0q}{b}\right)\lambda+\left(\tfrac{x_0^2}{a^2}-\tfrac{y_0^2}{b^2}-1\right)=0\ .$$

Como a equação tem no máximo duas raízes reais, então $r\cap\mathbb{H}$ tem no máximo dois elementos. □

Consequentemente, não há 3 pontos colineares em uma hipérbole.

Proposição 49. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole. Para cada foco de $\mathbb{H}$ existe uma corda focal de comprimento mínimo e com extremos no mesmo ramo. Ainda, esta é perpendicular à reta focal.*

Demonstração. Podemos fixar um sistema de coordenadas (x,y) com origem no centro de $\mathbb{H}$. Daí $\mathbb{H}$: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a>0$ e $b>0$. Se $c=\sqrt{a^2+b^2}$, então que $F_1=(-c,0)$ e $F_2=(c,0)$ são os focos de $\mathbb{H}$. Fixemos $\vec{v}=(p,q)$, vetor não nulo e não paralelo às assíntotas. Seja r a reta que passa por F_1 e é paralela a $\vec{v}$. Para $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$F_1+\lambda\vec{v}\in\mathbb{H}\Leftrightarrow\tfrac{(\lambda p-c)^2}{a^2}-\tfrac{(\lambda q)^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\left(\tfrac{p^2}{a^2}-\tfrac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2-\tfrac{2pc}{a^2}\lambda+\tfrac{c^2}{a^2}-1=0\Leftrightarrow\left(\tfrac{p^2}{a^2}-\tfrac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2-\tfrac{2pc}{a^2}\lambda+\tfrac{b^2}{a^2}=0\ .$$

Pelo exercício 57, $\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\neq 0$ e esta equação é de fato de 2º.grau. Seu discriminante é

$$\Delta=\frac{4p^2c^2}{a^4}-\frac{4b^2}{a^2}\left(\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\right)=\frac{4p^2}{a^4}(c^2-b^2)+\frac{4q^2}{a^2}=\frac{4(p^2+q^2)}{a^2}=\frac{4\|\vec{v}\|^2}{a^2}\ .$$

Visto que $\vec{v}\neq\vec{0}$, a equação admite duas soluções distintas e a reta r encontra $\mathbb{H}$ exatamente duas vezes. Sejam λ_1 e λ_2 as duas raízes desta equação e $X_1=F_1+\lambda_1\vec{v}$ e $X_2=F_1+\lambda_2\vec{v}$. Já que $X_1=(\lambda_1p-c,\lambda_1q)$ e $X_2=(\lambda_2p-c,\lambda_2q)$, pelo exercício 51, estudemos o sinal de $(\lambda_1p-c)(\lambda_2p-c)$. Por sua vez

$$(\lambda_1p-c)(\lambda_2p-c)=\lambda_1\lambda_2p^2-pc(\lambda_1+\lambda_2)+c^2=\frac{\frac{b^2p^2}{a^2}-\frac{2p^2c^2}{a^2}+c^2\left(\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\right)}{\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}}=\frac{\frac{p^2}{a^2}(b^2-c^2)-\frac{c^2q^2}{b^2}}{\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}}=\frac{-p^2-\frac{c^2q^2}{b^2}}{\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}}\ .$$

Logo X_1 e X_2 estarão no mesmo ramo se, e somente se, $\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}<0$. Lembramos que $\overrightarrow{X_1X_2}=\overrightarrow{X_1F_1}+\overrightarrow{F_1X_2}=\overrightarrow{F_1X_2}-\overrightarrow{F_1X_1}=\lambda_2\vec{v}-\lambda_1\vec{v}=(\lambda_1-\lambda_2)\vec{v}$ e que $|\lambda_1-\lambda_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{\left|\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\right|}$. Portanto,

$$d(X_1,X_2)=|\lambda_2-\lambda_1|\cdot\|\vec{v}\|=\frac{2\|\vec{v}\|^2}{a\left|\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\right|}=\frac{2(p^2+q^2)}{a\left|\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\right|}\ .$$

Como $\frac{p^2+q^2}{b^2}\geq\frac{q^2}{b^2}-\frac{p^2}{a^2}>0$, deduzimos que $\frac{p^2+q^2}{\frac{q^2}{b^2}-\frac{p^2}{a^2}}\geq b^2$ e que $d(X_1,X_2)\geq\frac{2b^2}{a}$. Ainda,

$$d(X_1,X_2)=\frac{2b^2}{a}\Leftrightarrow\frac{p^2+q^2}{\frac{q^2}{b^2}-\frac{p^2}{a^2}}=b^2\Leftrightarrow p^2+q^2=q^2-\frac{b^2p^2}{a^2}\Leftrightarrow p=0\Leftrightarrow\vec{v}//(0,1)\ .$$

Concluímos que a corda focal que passa pelo foco F_1, tem extremos no mesmo ramo e tem comprimento mínimo é perpendicular à reta focal.

Com cálculos e argumentos análogos, concluímos o mesmo para a corda focal que passa por F_2. □

Definição 20. *Cada corda focal de uma hipérbole de comprimento mínimo com extremos no mesmo ramo é chamada de* ***latus rectum****.*

Exercício 70. *Determine fórmula para o comprimento dos* ***latera recta*** *de uma hipérbole.*

Exercício 71. *Determine equação da hipérbole, os focos, o centro, os parâmetros, as assíntotas e as diretrizes da hipérbole de vértices $V_1=(5,4)$ e $V_2=(1,4)$ e latera recta medindo 5.*

Proposição 50. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole. Se $\overline{X_1X_2}$ e $\overline{X_3X_4}$ são cordas de $\mathbb{H}$, paralelas e distintas, então a reta determinada pelos seus pontos médios passa pelo centro de $\mathbb{H}$.*

Demonstração. Podemos fixar um sistema de coordenadas (x,y) com origem no centro de $\mathbb{H}$ e tal que $\mathbb{H}$: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a>0$ e $b>0$. Sejam $X_1=(x_1,y_1)$, $X_2=(x_2,y_2)$, $X_3=(x_3,y_3)$ e $X_4=(x_4,y_4)$. Dado que $\overline{X_1X_2}$ e $\overline{X_3X_4}$ são cordas de $\mathbb{H}$ paralelas, podemos fixar $\vec{v}=(p,q)\neq\vec{0}$ e $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, ambos não nulos, tais que $\overrightarrow{X_1X_2}=\lambda\vec{v}$ e $\overrightarrow{X_3X_4}=\mu\vec{v}$.

Observamos que

$$\tfrac{x_1^2}{a^2}-\tfrac{y_1^2}{b^2}=1=\tfrac{x_2^2}{a^2}-\tfrac{y_2^2}{b^2}\Rightarrow\tfrac{\lambda p(x_1+x_2)}{a^2}=\tfrac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{a^2}=\tfrac{x_2^2-x_1^2}{a^2}=\tfrac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=\tfrac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{b^2}=\tfrac{\lambda q(y_1+y_2)}{b^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\tfrac{p(x_1+x_2)}{a^2}-\tfrac{q(y_1+y_2)}{b^2}=0\Leftrightarrow(x_1+x_2,y_1+y_2)\bullet\vec{u}=0\ ,$$

onde $\vec{u}=\left(\frac{p}{a^2},-\frac{q}{b^2}\right)$. Se M_1 é o ponto médio da corda $\overline{X_1X_2}$, então $\overrightarrow{OM_1}\perp\vec{u}$. Analogamente, prova-se que, se M_2 é o ponto médio da corda $\overline{X_3X_4}$, então $\overrightarrow{OM_2}\perp\vec{u}$. Sendo assim, $\overrightarrow{OM_1}$ e $\overrightarrow{OM_2}$ são paralelos. Consequentemente, O, M_1 e M_2 são colineares. □

Corolário 14. *Os únicos eixos de simetria de uma hipérbole são as retas suportes dos eixos transverso e conjugado.*

Demonstração. Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole e suponhamos que r é um eixo de simetria para $\mathbb{H}$. Para cada ponto X, seja X' o simétrico de X com relação à reta r. Uma vez que $r\cap\mathbb{H}$ tem no máximo dois elementos e que $\mathbb{H}$ tem infinitos elementos, podemos fixar $P\in\mathbb{H}\backslash r=\mathbb{H}\backslash(\mathbb{H}\cap r)$. Caso $P=P'$, teríamos $P\in r$, o que não acontece. Logo $P\neq P'$ e determinam corda de $\mathbb{H}$. Fixemos $Q\in\mathbb{H}\setminus(r\cup\{P,P'\})$. Analogamente, $Q\neq Q'$ e também determinam corda de $\mathbb{H}$. Se $Q'=P'$ ou $Q'=P$, então $Q=P$ ou $Q=P'$, algo que não acontece. Portanto $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são cordas distintas. Como ambas são perpendiculares a r, $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são segmentos paralelos. Pela proposição 50, seus pontos médios e o centro de $\mathbb{H}$ são colineares. Como estes pontos médios estão em r, o centro de $\mathbb{H}$ pertence a r.

Fixemos um sistema de coordenadas tal que $\mathbb{H}\colon\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a>0$ e $b>0$. Naturalmente, $(0,0)$ é o centro de $\mathbb{H}$. Ainda, $r\colon\alpha x+\beta y=0$, para $\vec{n}=(\alpha,\beta)\neq\vec{0}$. Como a reta $y=0$ é eixo de simentria para $\mathbb{H}$, podemos supor que r não é horizontal, ou seja, que $\alpha\neq0$. O vértice $A=(a,0)\in\mathbb{H}$ e $A'\in\mathbb{H}$. Como o segmento $\overline{AA'}$ é perpendicular a r e o seu ponto médio pertence a r, existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $A+\lambda\vec{n}\in r$ e $A+2\lambda\vec{n}=A'\in\mathbb{H}$. Mas

$$A+\lambda\vec{n}\in r\Leftrightarrow\alpha(a+\lambda\alpha)+\beta(\lambda\beta)=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{-\alpha a}{\alpha^2+\beta^2}\ .$$

Por sua vez, dado que $\lambda\neq0$,

$$A+2\lambda\vec{n}\in\mathbb{H}\Leftrightarrow\tfrac{(a+2\alpha\lambda)^2}{a^2}-\tfrac{(2\beta\lambda)^2}{\beta^2}=1\Leftrightarrow\tfrac{a^2+4a\alpha\lambda+4\alpha^2\lambda^2}{a^2}-\tfrac{4\beta^2\lambda^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\left(\tfrac{\alpha^2}{a^2}-\tfrac{\beta^2}{b^2}\right)\lambda=-\tfrac{\alpha}{a}\ .$$

Por outro lado,

$$\frac{-\alpha a}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}\right)=-\frac{\alpha}{a}\Leftrightarrow\ a^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}\right)=\alpha^2+\beta^2\Leftrightarrow-\frac{a^2\beta^2}{b^2}=\beta^2\Leftrightarrow\beta=0\ ,$$

pois $a^2+b^2\neq0$. Sendo assim, r é vertical. □

Teorema 51. *Sejam $\mathbb{H}$ uma hipérbole e $X_0\in\mathbb{H}$. Existe uma única reta t tal que $t\cap\mathbb{H}=\{X_0\}$ e t não é paralela a nenhuma das assíntotas.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas tal que $\mathbb{H}\colon\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a>0$ e $b>0$. Seja r uma reta que passa por $X_0=(x_0,y_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}=(p,q)\neq\vec{0}$. Suponhamos que r não é paralela a nenhuma das assíntotas. Pelo exercício 57, induzimos que $\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\neq0$. Para $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$X_0+\lambda\vec{v}\in\mathbb{H}\Leftrightarrow\tfrac{(x_0+p\lambda)^2}{a^2}-\tfrac{(y_0+q\lambda)^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\tfrac{x_0^2+2px_0\lambda+p^2\lambda^2}{a^2}-\tfrac{(y_0^2+2qy_0\lambda+q^2\lambda^2)}{b^2}=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\tfrac{p^2}{a^2}-\tfrac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2+2\left(\tfrac{px_0}{a^2}-\tfrac{qy_0}{b^2}\right)\lambda=0\quad\Leftrightarrow\quad\lambda=0\text{ ou }\ \lambda=-2\left(\frac{\frac{px_0}{a^2}-\frac{qy_0}{b^2}}{\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}}\right)\ .$$

A solução $\lambda=0$ corresponde ao ponto X_0, que é elemento de $\mathbb{H}\cap r$. Portanto, $\mathbb{H}\cap r=\{X_0\}$ se, e somente se, $\frac{px_0}{a^2}-\frac{qy_0}{b^2}=0$. Dado que $X_0\in\mathbb{H}$, os vetores $\vec{n}=\left(\frac{x_0}{a^2},-\frac{y_0}{b^2}\right)$ e $\vec{u}=\left(\frac{y_0}{b^2},\frac{x_0}{a^2}\right)$ são ambos não nulos. Além do mais,

$$\frac{\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2}{b^2}=\frac{\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{x_0^2}{a^2}}{a^2b^2}=\frac{-1}{a^2b^2}$$

e o vetor $\vec{u}$ não é paralelo a nenhuma das assíntotas. Notamos que

$$\tfrac{px_0}{a^2}-\tfrac{qy_0}{b^2}=0\quad\Leftrightarrow\quad\vec{v}\perp\left(\tfrac{x_0}{a^2},-\tfrac{y_0}{b^2}\right)\quad\Leftrightarrow\quad\vec{v}\,/\!/\left(\tfrac{y_0}{b^2},\tfrac{x_0}{a^2}\right)\ .$$

Tomemos por t a reta que passa por X_0 e é paralela ao vetor $\vec{u}$. Pela discussão acima, $t\cap\mathbb{H}=\{X_0\}$, t não é paralela a nenhuma das assíntotas e é a única satisfazendo estas duas condições. □

Definição 21. *Sejam* $\mathbb{H}$ *uma hipérbole e* $X_0 \in \mathbb{H}$. *A* ***reta tangente a*** $\mathbb{H}$ ***no ponto*** X_0 *é a reta que passa por* X_0*, tem interseção unitária com* $\mathbb{H}$ *e não é paralela a nenhuma das assíntotas. A* ***reta normal a*** $\mathbb{H}$ ***no ponto*** X_0 *é a reta que passa por* X_0 *e é perpendicular à reta tangente no mesmo ponto* X_0.

Corolário 15. *Se* $\mathbb{H}\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$*, onde* $a > 0$ *e* $b > 0$ *e* $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{H}$*, então a reta tangente a* $\mathbb{H}$ *em* X_0 *tem equação* $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Demonstração. Pela demonstração do teorema 51, a reta tangente é perpendicular ao vetor $\left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2}\right)$. Uma vez que passa por X_0, uma equação para a reta tangente é $\left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2}\right) \bullet (x - x_0, y - y_0) = 0$. Mas

$$\left(\tfrac{x_0}{a^2}, -\tfrac{y_0}{b^2}\right) \bullet (x - x_0, y - y_0) = 0 \Leftrightarrow \tfrac{x_0 x}{a^2} - \tfrac{y_0 y}{b^2} - \tfrac{x_0^2}{a^2} + \tfrac{y_0^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \tfrac{x_0 x}{a^2} - \tfrac{y_0 y}{b^2} = 1 \ ,$$

pois que $X_0 \in \mathbb{H}$. □

Exercício 72. *Determine equação das retas tangente e normal à hiperbole de equação* $2x^2 + 6xy + 2y^2 + 6x - 6y - 27 = 0$ *no ponto* $P = \left(\frac{6-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-6+9\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercício 73. *Determine as retas tangentes à hipérbole* $\mathbb{H}\colon y = \frac{1}{x} - \frac{3x}{4}$ *nos seus vértices.*

Teorema 52. *Seja* $\mathbb{H}$ *uma hipérbole de focos* F_1 *e* F_2*. Se* $X_0 \in \mathbb{H}$ *e* $\overrightarrow{t_0}$ *é vetor diretor da reta tangente a* $\mathbb{H}$ *em* X_0*, então* $\operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F_1}, \overrightarrow{t_0}) = \operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F_2}, \overrightarrow{t_0})$

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas tal que $\mathbb{H}\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$. Se $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, então, sem perda de genaralidade, podemos escrever $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

Se $X_0 = (x_0, y_0)$, então a reta tangente a $\mathbb{H}$ em X_0 tem equação $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. Se $\overrightarrow{t_0}$ é vetor paralelo à tal reta tangente, $\overrightarrow{t_0} = \lambda \overrightarrow{v_0}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, não nulo, e $\overrightarrow{v_0} = \left(\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2}\right)$. Pela proposição 24, $\|\overrightarrow{X_0F_1}\| = \left|\frac{cx_0}{a} + a\right|$. Sendo assim,

$$\overrightarrow{X_0F_1} \bullet \overrightarrow{v_0} = \tfrac{-y_0(c+x_0)}{b^2} - \tfrac{x_0 y_0}{a^2} = \tfrac{-y_0 c}{b^2} - x_0 y_0 \left(\tfrac{1}{b^2} + \tfrac{1}{a^2}\right) = -\tfrac{c y_0}{b^2} - \tfrac{x_0 y_0 c^2}{a^2 b^2} = -\tfrac{c y_0}{a b^2}\left(\tfrac{c x_0}{a} + a\right)$$

Se $\theta_1 = \operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F_1}, \overrightarrow{t_0})$, então

$$\cos\theta_1 = \frac{\overrightarrow{X_0F_1} \bullet (\lambda \overrightarrow{v_0})}{\|\overrightarrow{X_0F_1}\| \cdot |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{v_0}\|} = \frac{-|\lambda| c y_0}{a b^2 \lambda \|\overrightarrow{v_0}\|} \cdot \frac{\left(\frac{c x_0}{a} + a\right)}{\left|\frac{c x_0}{a} + a\right|} \ .$$

Analogamente, se $\theta_2 = \operatorname{ang}(\overrightarrow{X_0F_2}, \overrightarrow{t_0})$, concluímos que $\cos\theta_2 = \frac{-|\lambda| c y_0}{a b^2 \lambda \|\overrightarrow{v_0}\|} \cdot \frac{\left(\frac{c x_0}{a} - a\right)}{\left|\frac{c x_0}{a} - a\right|}$. Como $X_0 \in \mathbb{H}$, os números $\left(\frac{c x_0}{a} + a\right)$ e $\left(\frac{c x_0}{a} - a\right)$ têm mesmo sinal (ver demonstração da proposição 24). Portanto $\frac{\left(\frac{c x_0}{a} + a\right)}{\left|\frac{c x_0}{a} + a\right|} = \frac{\left(\frac{c x_0}{a} - a\right)}{\left|\frac{c x_0}{a} - a\right|}$, $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ e, consequentemente, $\theta_1 = \theta_2$. □

Este último resultado mostra que, se um raio de luz é emitido de um foco de uma hipérbole, ele se refletirá nela de tal forma que o outro foco está na reta suporte da trajetória do raio refletido.

10. Algumas equivalências

Seja $\Gamma\colon ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ uma cônica, lembrando que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, e sejam

$$\Delta_1 = a + c, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} .$$

Vários teoremas puderam determinar qual cônica representava a partir dos valores de Δ_1, Δ_2 e Δ_3. Vamos revisitar alguns desses teoremas mostrando que, para alguns deles, são válidas equivalências.

Teorema 53. Γ *representa parábola se, e somente se,* $\Delta_2 = 0$ *e* $\Delta_3 \neq 0$.

Demonstração. Se $\Delta_2 = 0$ e $\Delta_3 \neq 0$, então Γ representa uma parábola, pelo teorema 16.

Agora suponhamos que Γ representa parábola. Pelos teoremas 29 e 30, $\Delta_2 \leq 0$, visto que Γ não é conjunto vazio, nem ponto, nem elipse, e muito menos circunferência. Pelos teoremas 44 e 45, concluímos que $\Delta_2 = 0$, já que Γ não é hipérbole nem união de retas concorrentes. Finalmente, dado que Γ não é reta, nem união de retas nem é conjunto vazio, pelo teorema 5 e pelo exercício 5, concluímos que $\Delta_3 \neq 0$. □

Teorema 54. Γ *representa elipse ou circunferência se, e somente se,* $\Delta_2 > 0$ *e* $\Delta_1\Delta_3 < 0$.

Demonstração. Se $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_1\Delta_3 < 0$, então Γ representa elipse ou circunferência, pelo teorema 29.

Agora suponhamos que Γ representa elipse ou circunferência. Pelos toeremas 44 e 45, concluímos que $\Delta_2 \geq 0$, já que Γ não é hipérbole nem união de retas concorrentes. Pelos teoremas 16 e 5, além do exercício 5, segue que $\Delta_2 > 0$ pois Γ não é parábola, nem reta, nem união de retas paralelas e muito menos o conjunto vazio. Visto que $\Delta_2 = ac - \frac{b^2}{4} > 0$, deduzimos que $ac > 0$ e $\Delta_1 = a + c \neq 0$. Pelo teorema 30, segue que $\Delta_1\Delta_3 < 0$, dado que Γ não é conjunto vazio nem ponto. □

Teorema 55. Γ *representa hipérbole se, e somente se,* $\Delta_2 < 0$ *e* $\Delta_3 \neq 0$.

Demonstração. Se $\Delta_2 < 0$ e $\Delta_3 \neq 0$, então Γ representa hipérbole, pelo teorema 44.

Agora suponhamos que Γ representa hipérbole. Pelos teoremas 29 e 30, $\Delta_2 \leq 0$, visto que Γ não é conjunto vazio, nem ponto, nem elipse, e muito menos circunferência. Pelos teoremas 16 e 5, além do exercício 5, segue que $\Delta_2 < 0$ pois Γ não é parábola, nem reta, nem união de retas paralelas e muito menos o conjunto vazio. Pelo teorema 45, $\Delta_3 \neq 0$, pois Γ não é união de retas concorrentes. □

Teorema 56. Γ *representa união de retas concorrentes se, e somente se,* $\Delta_2 < 0$ *e* $\Delta_3 = 0$.

Demonstração. Se $\Delta_2 < 0$ e $\Delta_3 = 0$, então Γ representa hipérbole, pelo teorema 45.

Agora suponhamos que Γ representa união de retas concorrentes. Pelos teoremas 29 e 30, $\Delta_2 \leq 0$, visto que Γ não é conjunto vazio, nem ponto, nem elipse, e muito menos circunferência. Pelos teoremas 16 e 5, além do exercício 5, segue que $\Delta_2 < 0$ pois Γ não é parábola, nem reta, nem união de retas paralelas e muito menos o conjunto vazio. Pelo teorema 44, $\Delta_3 = 0$, pois Γ não é hipérbole. □

Teorema 57. Γ *representa ponto se, e somente se,* $\Delta_2 > 0$*,* $\Delta_3 = 0$.

Demonstração. Se $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_3 = 0$, então Γ representa ponto, pelo teorema 30.

Agora suponhamos que somente um ponto satisfaça a equação de Γ. Pelos teoremas 16 e 5, além do exercício 5, segue que $\Delta_2 \neq 0$ pois Γ não é parábola, nem reta, nem união de retas paralelas e muito menos o conjunto vazio. Pelos teoremas 44 e 45, $\Delta_2 > 0$, pois Γ não é união de retas concorrentes nem hipérbole. Como Γ não é elipse nem circunferência, pelo teorema 29, $\Delta_1\Delta_3 \geq 0$. Pelo teorema 30, segue que $\Delta_1\Delta_3 = 0$, pois Γ não reprensenta o conjunto vazio. Visto que $\Delta_2 = ac - \frac{b^2}{4} > 0$, deduzimos que $ac > 0$ e $\Delta_1 = a + c \neq 0$. Sendo assim, $\Delta_3 = 0$. □

Teorema 58. Γ *representa reta se, e somente se,* $\Delta_2 = \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = 0$.

Demonstração. Se $\Delta_2 = \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = 0$, dado que $a \neq 0$ ou $c \neq 0$, segue que Γ representa reta pelo teorema 5 e pelo exercício 5.

Agora suponhamos que Γ represente uma reta. Pelos teoremas 29 e 30, $\Delta_2 \leq 0$, visto que Γ não é conjunto vazio, nem ponto, nem elipse, e muito menos circunferência. Pelos teoremas 44 e 45, deduzimos que $\Delta_2 = 0$, pois Γ não é união de retas concorrentes nem hipérbole. Dado que Γ não é parábola, pelo teorema 16, segue que $\Delta_3 = 0$.

Sem perda de generalidade, suponhamos $a \neq 0$. Sendo assim, $c = \frac{b^2}{4a}$. Pelo lema 3, $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{e}{2} \end{vmatrix} = 0$ e $e = \frac{bd}{2a}$. Pelo teorema 5, $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} = 0$ e $f = \frac{d^2}{4a}$. Portanto

$$\begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = \left(\frac{b^2}{4a}\right)\left(\frac{d^2}{4a}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{bd}{2a}\right)^2 = 0\ .$$

□

Teorema 59. Γ *representa união de duas retas paralelas distintas se, e somente se,* $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$ *e ainda* $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} < 0$ *ou* $\begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} < 0$.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$ e $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} < 0$. Caso $a = 0$, segue que $b = 0 \neq c$. Pelo lema 3, $\begin{vmatrix} \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ c & \frac{e}{2} \end{vmatrix} = 0$ e deduzimos que $d = 0$, o que é um absurdo pois, neste caso, $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} = 0$. Concluímos que $a \neq 0$ e, pelo teorema 5, Γ representa união de duas retas paralelas distintas.

Agora suponhamos que Γ represente a união de duas retas paralelas distintas. Pelos teoremas 29 e 30, induzimos que $\Delta_2 \leq 0$, visto que Γ não é conjunto vazio, nem ponto, nem elipse, e muito menos circunferência. Pelos teoremas 44 e 45, deduzimos que $\Delta_2 = 0$, pois Γ não é união de retas concorrentes nem hipérbole. Dado que Γ não é parábola, pelo teorema 16, segue que $\Delta_3 = 0$.

Se $a \neq 0$, então $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} < 0$, pelo teorema 5. Se $a = 0$, então $b = 0 \neq c$ e, pelo exercício 5, segue que $\begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} < 0$. □

Exercício 74. *Mostre que, se* $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$*, então* $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \geq 0$.

Teorema 60. Γ *representa o conjunto vazio se, e somente se, uma das condições abaixo é verdadeira:*

(1) $\Delta_2 > 0$ *e* $\Delta_1\Delta_3 > 0$, *(2)* $\Delta_2 = \Delta_3 = 0 < \begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix}$, *ou* *(3)* $\Delta_2 = \Delta_3 = 0 < \begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}$.

Demonstração. Se $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_1\Delta_3 > 0$, então Γ é cônica vazia pelo teorema 30. Se $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$ e $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} > 0$, então $af > \frac{d^2}{4}$, $af > 0$ e $a \neq 0$. Consequentemente, pelo teorema 5, Γ representa o conjunto vazio. Analogamente o mesmo acontece se $\Delta_2 = \Delta_3 = 0 < \begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}$.

Suponhamos que nenhum ponto do plano satistaça a equação de Γ. Pelos teoremas 44 e 45, deduzimos que $\Delta_2 \geq 0$. Caso $\Delta_2 > 0$, pelos teoremas 29 e 30, induzimos que $\Delta_1\Delta_3 > 0$. Logo vale *(1)*. Caso $\Delta_2 = 0$, visto que Γ não representa parábola, deduzimos que $\Delta_3 = 0$, pelo teorema 16. Pelo teorema 59, temos que $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} \geq 0$ e $\begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \geq 0$. Já o teorema 58 nos faz concluir que os dois determinantes não podem ser simultaneamente nulos. Portanto, $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} > 0$ ou $\begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} > 0$, ou seja, vale *(2)* ou *(3)*. □