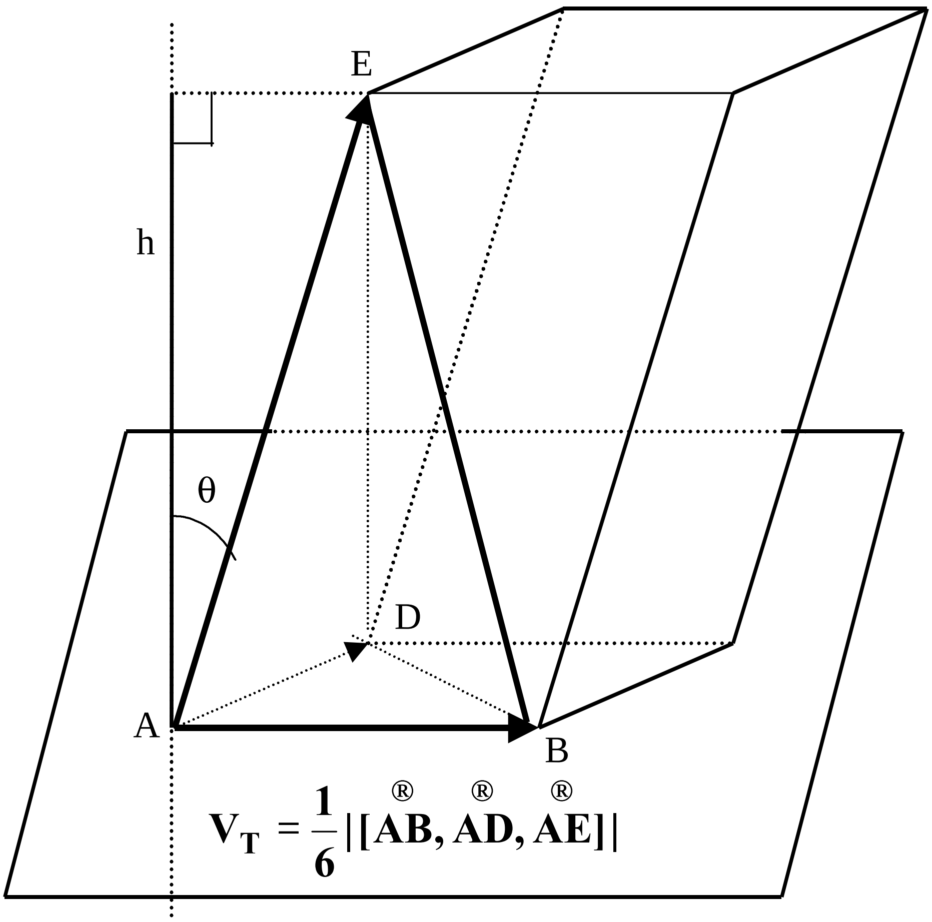
Cálculo



Vetorial

Instituto de Matemática – UFBA

1999

CAPÍTULO I - VETORES

1.1 Segmentos orientados

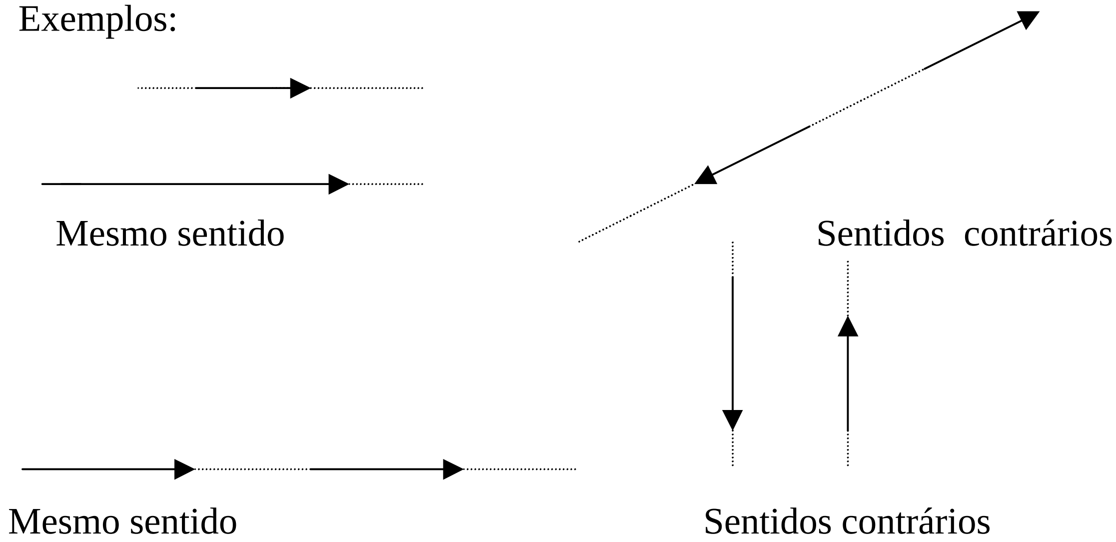
Consideremos uma reta r e sejam A e B dois pontos de r.

Ao segmento de reta AB, podemos associar um sentido : o sentido de A para B, ou o sentido de B para A. Escrevemos $\overline{AB}$ para representar o segmento de reta AB associado com o sentido de A para B. Dizemos que $\overline{AB}$ é o **segmento orientado de origem A e extremidade B** e $\overline{BA}$ é o segmento orientado de origem B e extremidade A. Chamamos $\overline{BA}$, **oposto** de $\overline{AB}$. Se A = B, dizemos que o segmento orientado $\overline{AB} = \overline{BA}$ é o **segmento nulo,** e escrevemos $\overline{AA}$ = O. Na reta r está representado graficamente $\overline{AB}$.

Fixada uma unidade de comprimento, a cada segmento orientado, podemos associar um número real não negativo, seu comprimento, que é a sua **medida** em relação àquela unidade. A medida do segmento $\overline{AB}$, indicamos por $\mathbf{med(\overline{AB})}$**.** Os segmentos nulos têm medida igual a zero. É claro que $\text{med}(\overline{AB}) = \text{med}(\overline{BA})$.

Dados dois segmentos orientados não nulos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, dizemos que eles têm **mesma direção**, se as retas suportes destes segmentos são paralelas ou coincidentes. Só podemos comparar os **sentidos** de dois segmentos orientados, se eles têm a mesma direção. Dois segmentos orientados opostos têm sentidos contrários.

Exemplos:



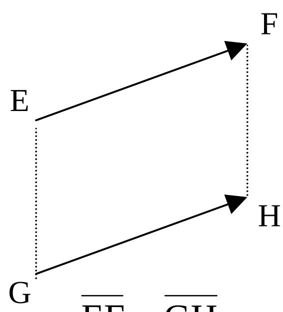
1.2 Equipolência

Definição: O segmento orientado $\overline{AB}$ é equipolente ao segmento orientado $\overline{CD}$, se ambos são segmentos nulos, ou se têm mesma medida e mesmo sentido.

Indicamos: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

Exemplos:

$\overline{AA} \sim \overline{BB}$ $\quad$ $\overline{AB} \sim \overline{CD}$



$\overline{EF} \sim \overline{GH}$

Propriedades:

1. $\overline{AB} \sim \overline{AB}$ (reflexiva).
2. Se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ então $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ (simétrica).
3. Se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ e $\overline{CD} \sim \overline{EF}$ então $\overline{AB} \sim \overline{EF}$ (transitiva).

4. Dados um segmento orientado $\overline{AB}$ e um ponto C, existe um único ponto D tal que $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.
5. Se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ então $\overline{BA} \sim \overline{DC}$.
6. Se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ então $\overline{AC} \sim \overline{BD}$.

Essas propriedades são de fácil verificação.

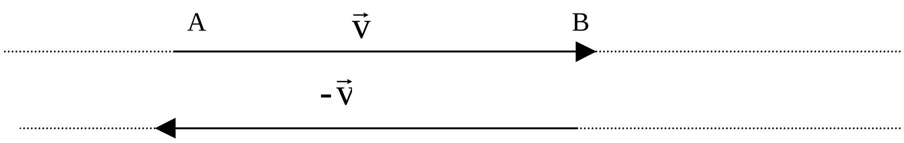
1.3 Vetores

Definição: Chamamos **vetor determinado por um segmento orientado** $\mathbf{\overline{AB}}$, ao conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a $\overline{AB}$.

O vetor determinado por $\overline{AB}$, indicamos por $\overrightarrow{AB}$.

Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ **são iguais** se, e somente se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$. Um mesmo vetor $\overrightarrow{AB}$ é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, que são chamados **representantes** desse vetor, e que são todos equipolentes entre si. Em particular, os segmentos nulos são representantes de um único vetor, que chamamos **vetor nulo**, e indicamos por $\vec{\mathbf{o}}$.

Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, chamamos o vetor $\overrightarrow{BA}$ **oposto** de $\overrightarrow{AB}$ e indicamos por $-\overrightarrow{AB}$ ou $-\vec{v}$.



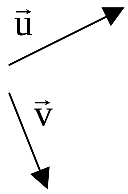
Decorre da propriedade 6 de 1.2 a implicação:

Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ então $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Dado um vetor $\vec{u}$, todos os seus representantes têm a mesma medida. Essa medida denominamos **módulo** do vetor $\vec{u}$, e indicamos por $|\vec{u}|$. Dizemos que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ não nulos têm **mesma direção** (**mesmo sentido**), se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm mesma direção (mesmo sentido).

Um vetor $\vec{u}$ é **unitário** se $|\vec{u}| = 1$. Chamamos **versor** de um vetor não nulo $\vec{u}$, o vetor unitário que tem mesmo sentido de $\vec{u}$, e indicamos por $\vec{u}^{\circ}$.

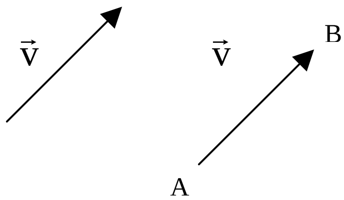
Dizemos que dois vetores não nulos são **ortogonais,** se podem ser representados por segmentos orientados ortogonais, e indicamos por $\vec{u} \perp \vec{v}$.



Convencionamos que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor do espaço.

1.4 Soma de um ponto com um vetor

Definição: Dados um ponto A e um vetor $\vec{v}$, existe um único ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. O ponto B chamamos **soma do ponto A com o vetor** $\vec{v}$.



Indicamos a soma $A + (\vec{v})$, simplesmente por $A + \vec{v}$.

Propriedades:

1. $A + \vec{o} = A$.
2. $(A - \vec{v}) + \vec{v} = A$.
3. Se $A + \vec{v} = B + \vec{v}$, então $A = B$.
4. Se $A + \vec{u} = A + \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$.
5. $A + \overrightarrow{AB} = B$.

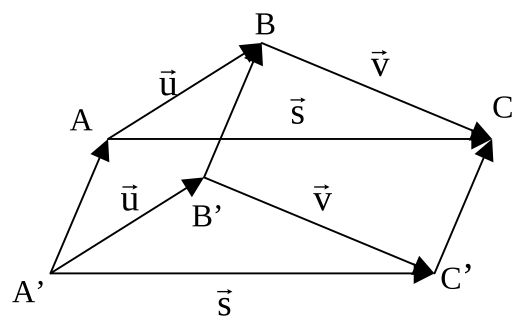
Essas propriedades são verificadas facilmente.

1.5 Adição de vetores

Definição: Consideremos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e um ponto qualquer A. Sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. O vetor $\vec{s} = \overrightarrow{AC}$ é chamado **vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$** e indicamos por $\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$.

Observemos que o vetor $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ independe do ponto A. De fato, se considerarmos outro ponto A' obteremos $B' = A' + \vec{u}$ e $C' = B' + \vec{v}$.

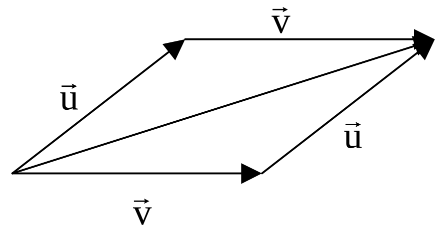
Assim, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.



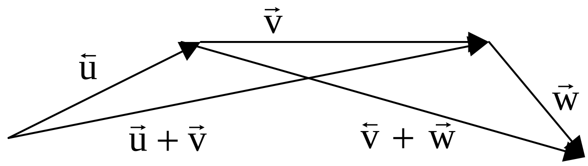
Usando a propriedade 1 de 1.3 , concluímos que :
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ e $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$. Daí, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ e portanto $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Propriedades:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutativa).



2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
(associativa)



3. $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$ (elemento neutro).
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$ (elemento oposto).

Indicamos o vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$ por $\vec{u} - \vec{v}$. Notemos que $\vec{u} - \vec{v} \neq \vec{v} - \vec{u}$.

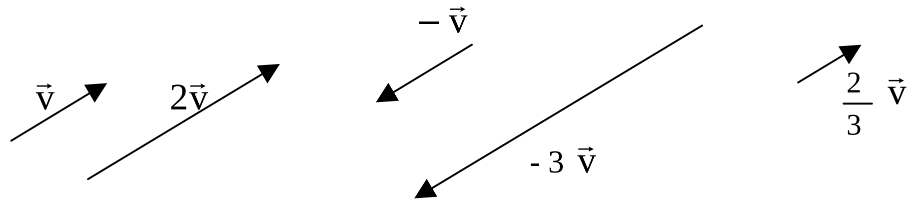
1.6 Produto de um número real por um vetor

Definição: Dados $a \in R^*$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$, chamamos **produto de a por** $\vec{v}$, o vetor $\vec{\mathbf{w}} = \mathbf{a}\vec{\mathbf{v}}$, que satisfaz às condições abaixo:

1. $|\vec{w}| = |a||\vec{v}|$.
2. A direção de $\vec{w}$ é a mesma da $\vec{v}$.
3. O sentido de $\vec{w}$ é igual ao de $\vec{v}$ se $a > 0$, e contrário ao de $\vec{v}$ se $a < 0$.

Se $a = 0$ ou $\vec{v} = \vec{o}$, o produto $a\vec{v}$ é o vetor nulo.

Exemplos:



Se $a \neq 0$, o produto $\frac{1}{a}\vec{v}$ é indicado por $\frac{\vec{v}}{a}$. Se $\vec{v} \neq \vec{o}$, é fácil mostrar que $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ é o versor de $\vec{v}$, ou seja $\vec{v}^\circ = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e portanto $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{v}^\circ$.

Propriedades:

1. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$.
2. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.
3. $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$.
4. $1\vec{v} = \vec{v}$.

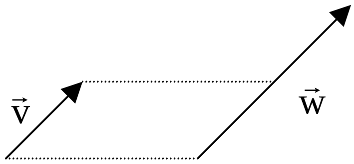
Nas propriedades acima, $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ são vetores quaisquer, **a** e **b** são números reais.

1.7 Combinação linear

Definição 1: Dados n vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ e n escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, chamamos o vetor $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n$, de **combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ com coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$.**

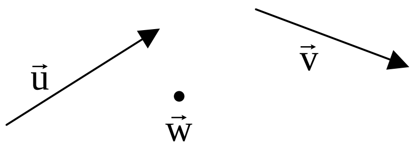
Nos exemplos 1, 2 e 3 a seguir, escrevemos $\vec{w}$ como combinação linear dos vetores dados.

Exemplo 1:



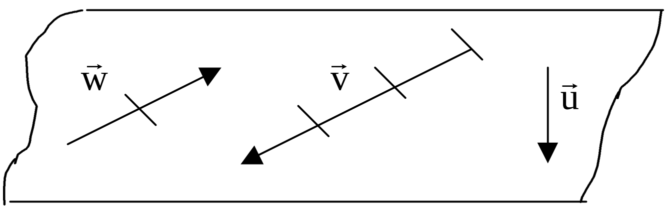
Neste exemplo, $\vec{w} = 2\vec{v}$.

Exemplo 2:



Como $\vec{w} = \vec{o} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$, dizemos que $\vec{o}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com coeficientes zeros.

Exemplo 3:



Observando a figura ao lado, podemos escrever :

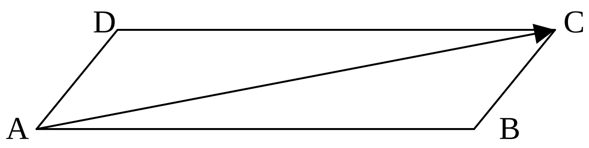
$$\vec{w} = -\frac{2}{3}\vec{v} + 0\vec{u}.$$

Assim, $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com coeficientes $-\frac{2}{3}$ e 0.

Note que, o vetor $\vec{u}$ não pode ser escrito como combinação linear de $\vec{w}$ e $\vec{v}$.

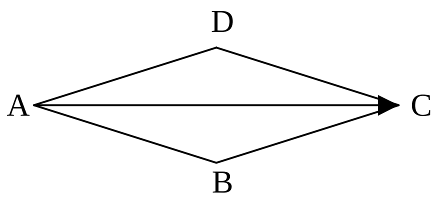
Exemplo 4:

Consideremos um paralelogramo ABCD.

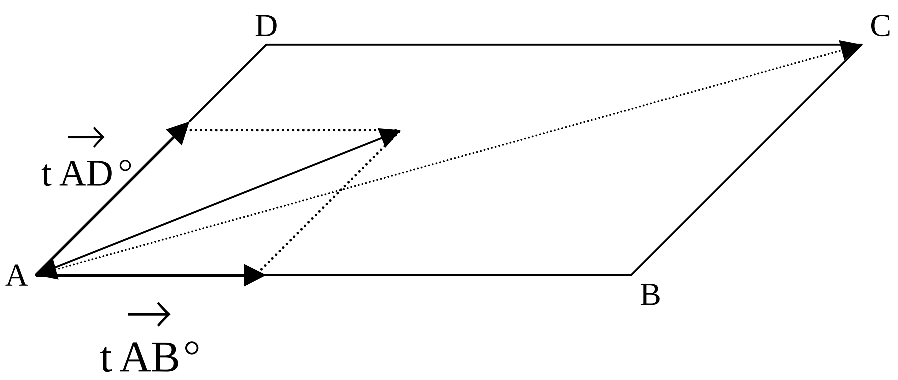


Observemos que o vetor $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ possui a mesma direção que a diagonal AC.

Se $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$, este paralelogramo será um losango. Sabemos que em um losango ABCD, a bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$ contém a diagonal AC. Assim, o vetor $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ possuirá também a mesma direção da bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$.

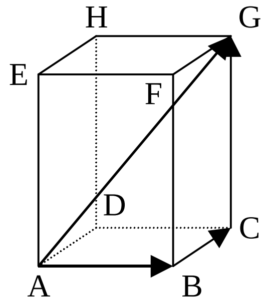


No caso de $|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AD}|$, o vetor $\overrightarrow{AC}$ não possui a mesma direção da bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$. Para conseguirmos um vetor que possua a mesma direção da bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$, basta tomarmos o vetor $\vec{v} = t\,\overrightarrow{AB}^{\circ} + t\,\overrightarrow{AD}^{\circ},\ t \in R^{*}$.



Exemplo 5:

Observando o paralelepípedo ao lado, podemos escrever:



$$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG}$$

Dizemos então que $\vec{AG}$ é combinação linear dos vetores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ e $\vec{CG}$. Como $\vec{BC} = \vec{AD}$ e $\vec{CG} = \vec{AE}$, podemos também escrever:

$$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$$

Assim, podemos também dizer que $\vec{AG}$ é combinação linear dos vetores $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ e $\vec{AE}$.

Definição 2: Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ são **colineares (paralelos)**, se possuem representantes em uma mesma reta. Neste caso indicamos $\vec{v}_1 // \vec{v}_2 // \vec{v}_3, ..., // \vec{v}_n$.

No exemplo 1, temos $\vec{u} // \vec{w}$, e no exemplo 2 temos $\vec{w} // \vec{u}$ e $\vec{w} // \vec{v}$, embora $\vec{u}$ **e** $\vec{v}$ não sejam paralelos.

Definição 3: Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ são **coplanares**, se possuem representantes em um mesmo plano.

Observamos que a colinearidade de vetores é um caso particular da coplanaridade de vetores.

Nos exemplos de 1 a 4, os vetores envolvidos são coplanares.

Propriedades:

1. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, podemos escrever um deles como combinação linear do outro.

Prova: "$\Rightarrow$" Começaremos considerando os seguintes casos:

1) $\vec{u} = \vec{o} = \vec{v}$; $\vec{u} = t\vec{v}$, $t \in IR$

2) $\vec{u} = \vec{o}$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$; temos $\vec{u} = 0\vec{v}$

3. $\vec{u} \neq \vec{o}$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$. Como $\vec{u} // \vec{v}$, temos $\vec{u}^{o} = \pm\ \vec{v}^{o}$. Daí, $|\vec{u}|\vec{u}^{o} = \pm|\vec{u}|\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, ou seja, $\vec{u} = \pm\dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\vec{v}$. Assim, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido podemos escrever $\vec{u} = \dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\vec{v}$. E se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários temos $\vec{u} = -\dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\vec{v}$.

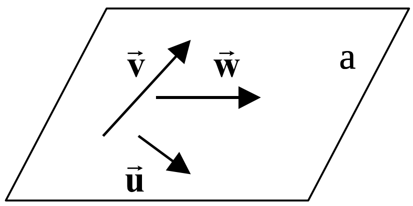
Por outro lado, suponhamos que podemos escrever $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{v}$, ou seja, $\vec{u} = t\,\vec{v}$. Pela definição de produto de um número real por vetor, temos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção, logo são paralelos.

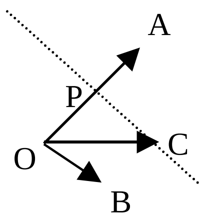
2. Os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se, e somente se, podemos escrever um deles como combinação linear dos outros.

Prova: Suponhamos que $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares, temos então os seguintes casos:

1) Um deles sendo o vetor nulo, digamos $\vec{u} = \vec{o}$.
   Podemos escrever: $\vec{u} = 0\vec{v} + 0\vec{w}$.
2) Dois deles são paralelos, digamos $\vec{u} // \vec{v}$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$.
   Podemos escrever: $\vec{u} = m\vec{v} = m\vec{v} + 0\vec{w}$, $m \in IR$.
3) Quaisquer dois desses vetores não paralelos.

Vamos considerar a figura ao lado, onde *a* é um plano que contém representantes dos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.





Tomemos $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$. Tracemos pelo ponto C uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$, que intercepta a reta OA no ponto P. Assim podemos escrever: $\vec{w} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$.

Como $\overrightarrow{OP} // \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{PC} // \overrightarrow{OB}$ temos: $\vec{w} = m\vec{v} + n\vec{u}$, $m,n \in IR$.

Por outro lado, suponhamos que $\vec{w} = m\vec{v} + n\vec{u}$, $n, m \in IR$. Assim, pela definição de adição de vetores, temos que $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

1.8 Dependência linear

Definição 1: Dizemos que um vetor $\vec{v}$ é **linearmente dependente**, se $\vec{v} = \vec{o}$.

Definição 2: Dizemos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **linearmente dependentes** se eles são paralelos.

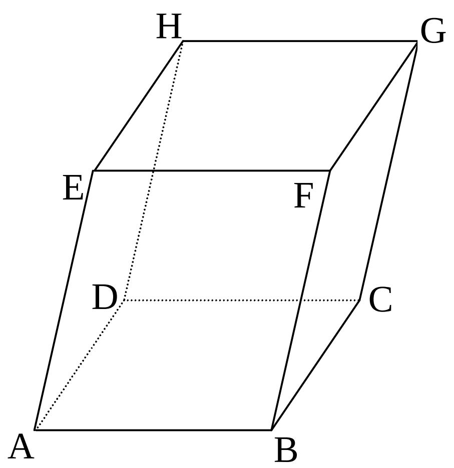
Definição 3: Dizemos que três vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são **linearmente dependentes** se eles são coplanares.

Definição 4: Dizemos que mais de três vetores do espaço ($\mathbf{IR}^3$), são sempre **linearmente dependentes.**

Quando os vetores do espaço não são **linearmente dependentes** (LD), dizemos que eles são **linearmente independentes** (LI).

Exemplos:

Considerando o paralelepípedo de arestas AB, AD e AE, temos:



1) $\overrightarrow{AB}$ é LI. 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ é LD.

3) $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ são LI.

4) $\overrightarrow{AB}$ e $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ são LD.

5) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ são LI..

6) $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ são LD.

7) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{FF}$ são LD.

8) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}$ $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AG}$ são LD.

Propriedades:

1. Se um vetor $\vec{v}$ é LI, então dado $\vec{u} // \vec{v}$, temos que existe um único escalar m tal que $\vec{u} = m\vec{v}$.

Prova: Como $\vec{v}$ é LI, temos pela prova da propriedade 1 de 1.7, que $\vec{u} = m\vec{v}$ e m é único.

2. Se dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são LI, então dado $\vec{v}$ coplanar com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, temos que existe um único par de escalares (m, n), tal que $\vec{v} = m\vec{v}_1 + nv_2$.

Prova: Como $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são coplanares e, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são LI, temos pela prova da propriedade 2 de 1.7, que $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2$.

Para mostrar que esses escalares são únicos, vamos supor que existam m'e n', tais que : $\vec{v} = m'\vec{v}_1 + n'\vec{v}_2$. Então $(m - m')\vec{v}_1 + (n - n')\vec{v}_2 = \vec{o}$. Se $m - m' \neq 0$, podemos escrever $\vec{v}_1 = -\dfrac{(n - n')}{(m - m')}\vec{v}_2$. Daí, $\vec{v}_1 // \vec{v}_2$, o que contradiz o fato de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ serem LI. Logo, $m - m' = 0$, ou seja, $m = m'$.

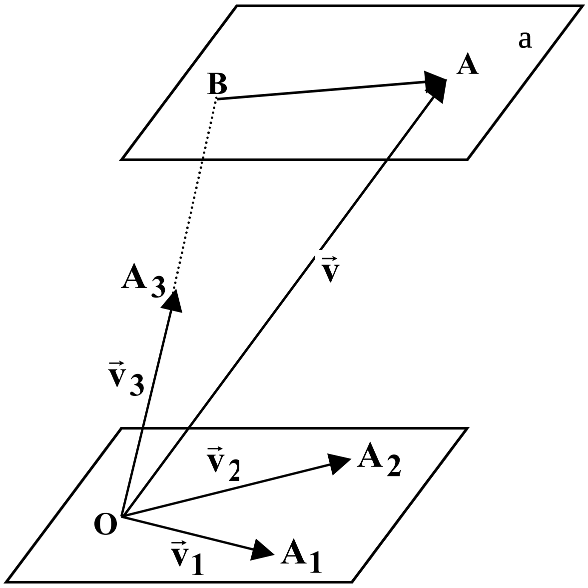
Analogamente podemos mostrar que $n = n'$.

3. Se três vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são LI, então dado um vetor $\vec{v}$ qualquer, temos que existe único terno de escalares (m, n, p), tal que $\vec{v} = m\vec{v}_1 + nv_2 + p\vec{v}_3$.

Prova: Suponhamos que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são LI, temos então os seguintes casos:

1) $\vec{v} = \vec{o}$. Podemos escrever: $\vec{v} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$.
2) $\vec{v}$ paralelo a um dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, digamos $\vec{v} // \vec{v}_1$. Então podemos escrever: $\vec{v} = m\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$.
3) $\vec{v}$ coplanar com dois dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, digamos $\vec{v}, \vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são coplanares. Assim temos: $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$.

4) $\vec{v}$ não é coplanar com quaisquer dois dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. Vamos considerar a figura a seguir, onde α é o plano paralelo ao plano OA_1A_2 passando pelo ponto A. Seja B é o ponto de interseção da reta OA_3 com o plano α.



Temos então:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}.$$

Como $\overrightarrow{OB} // \vec{v}_3$ e $\overrightarrow{BA}$ é coplanar com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, temos:

$$\overrightarrow{OB} = p\vec{v}_3,\ \overrightarrow{BA} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2.$$

Logo $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 + p\vec{v}_3$.

Para mostrarmos que esses escalares são únicos, vamos supor que $\vec{v} = m'\vec{v}_1 + n'\vec{v}_2 + p'\vec{v}_3$. Então temos:

$$(m - m')\vec{v}_1 + (n - n')\vec{v}_2 + (p - p')\vec{v}_3 = \vec{o}.$$

Se $m - m' \neq 0$, podemos escrever:

$$\vec{v}_1 = -\frac{n - n'}{m - m'}\ \vec{v}_2 - \frac{p - p'}{m - m'}\ \vec{v}_3\ ,$$

ou seja, $\vec{v}_1$ é coplanar com $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. O que contradiz o fato de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ serem LI. Logo $m - m' = 0$, ou seja, $m = m'$.

Analogamente podemos mostrar que $\mathbf{n} = \mathbf{n}'$ **e** $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$.

1.9 Base – Coordenadas de vetor

Definição 1: Dado um vetor $\vec{v}$ LI, dizemos que $\{\vec{v}\}$ é uma **base para o conjunto de vetores paralelos a** $\vec{v}$.

Definição 2: Dados dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ LI, dizemos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ **é uma base para o conjunto de vetores coplanares com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$**

Definição 3: Dados três vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ LI, dizemos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ **é uma base para o conjunto de vetores do espaço** (**IR^3**).

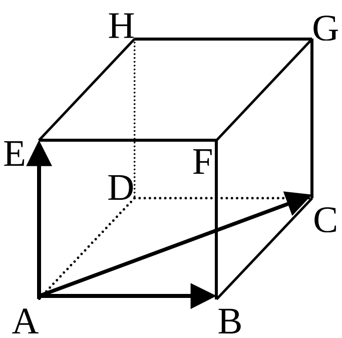
Definição 4: Dizemos que uma **base é ortogonal**, quando seus vetores são dois a dois ortogonais.

Definição 5: Dizemos que uma **base é ortonormal**, se ela for ortogonal e seus vetores unitários.

Costumamos representar uma base ortonormal por $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Fixada uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ do espaço, pela propriedade 3 de 1.8, para todo vetor $\vec{v}$, temos $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 + p\vec{v}_3$, onde m, n e p são únicos. Dizemos que **$m\vec{v}_1, n\vec{v}_2$ e $p\vec{v}_3$** são as **componentes de $\vec{v}$ na direção dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$** , respectivamente. Os escalares **m, n** e **p** são **as coordenadas de $\vec{v}$** em relação à base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.
Geralmente, representamos o vetor $\vec{v}$ através de suas coordenadas, ou seja, $\vec{v} = (m, n, p)$.

Exemplo 1:



Consideremos o cubo ao lado e fixemos a base $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\}$. Podemos escrever:

1. $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC} + 0\overrightarrow{AE}$, daí $\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$.
Analogamente, $\overrightarrow{AC} = (0,1,0)$ e $\overrightarrow{AE} = (0,0,1)$.

Podemos concluir então que, dada uma base qualquer $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, as coordenadas desses vetores em relação a esta base são:

$$\vec{v}_1 = (1,0,0),\quad \vec{v}_2 = (0,1,0) \ \text{e} \ \vec{v}_3 = (0,0,1).$$

2. $\overrightarrow{AF} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC} + 1\overrightarrow{AE}$, daí $\overrightarrow{AF} = (1,0,1)$.

Observamos que se a base considerada for $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}\}$, temos $\overrightarrow{AF} = (1,1,0)$.

3. $\overrightarrow{AG} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC} + 1\overrightarrow{AE}$, daí $\overrightarrow{AG} = (0,1,1)$.

Exemplo 2:

Consideremos $\vec{v} = (-1,1,1)$ em relação base $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\}$ do exemplo anterior. Assim, $\vec{v} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH}$.

Analogamente ao que foi feito para o conjunto dos vetores no espaço, podemos fazer para conjuntos de vetores coplanares e colineares. Assim, um vetor num conjunto de vetores coplanares tem duas coordenadas e um vetor num conjunto de vetores colineares tem uma coordenada.

Propriedades:

Seja $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ uma base do espaço. Consideremos os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, representados através de suas coordenadas em relação a esta base.

1. Se $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $t \in IR$ então:

a) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$ e $a_3 = b_3$.

b) $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$.

c) $t\,\vec{u} = (t\,a_1, t\,a_2, t\,a_3)$.

Prova: a) Como $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$ e $\vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + b_3\vec{v}_3$, temos:

$$(a_1 - b_1)\vec{v}_1 + (a_2 - b_2)\vec{v}_2 + (a_3 - b_3)\vec{v}_3 = \vec{o}$$

Daí, $\vec{o} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$.

Logo, $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$ e $a_3 - b_3 = 0$.

De maneira análoga podemos mostrar os itens b) e c).

Observamos que os vetores $\vec{u} = (0, 0, 0)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ são LD, visto que o vetor nulo é paralelo a todo vetor do espaço.

2. Sejam $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ vetores não nulos. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD se, e somente se, existe um $t \in IR$ tal que :

$$\begin{aligned} a_1 &= t\,b_1 \\ a_2 &= t\,b_2 \\ a_3 &= t\,b_3 \end{aligned}$$

Prova: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, então $\vec{u} \,//\, \vec{v}$. Como $\vec{v}$ é LI, podemos escrever: $\vec{u} = t\,\vec{v}$, ou seja,

$$\begin{aligned} a_1 &= t\,b_1 \\ a_2 &= t\,b_2 \\ a_3 &= t\,b_3. \end{aligned}$$

Por outro lado, se existe $t \in IR$, tal que

$$\begin{aligned} a_1 &= t\,b_1 \\ a_2 &= t\,b_2 \\ a_3 &= t\,b_3 \end{aligned}$$

então $\vec{u} = t\,\vec{v}$. Logo $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ e portanto $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD.

3. Três vetores $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$ são LD se, e somente se,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Esta propriedades pode ser demonstrada através de propriedades de determinantes.

Concluímos que se t não existe na propriedade 2, ou se Δ é diferente de zero, na propriedade 3, temos que os vetores considerados nessas propriedades são LI.

1.10 Sistemas de coordenadas cartesianas

Definição 1: Um sistema de coordenadas cartesianas no espaço é um conjunto formado por um ponto O e uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

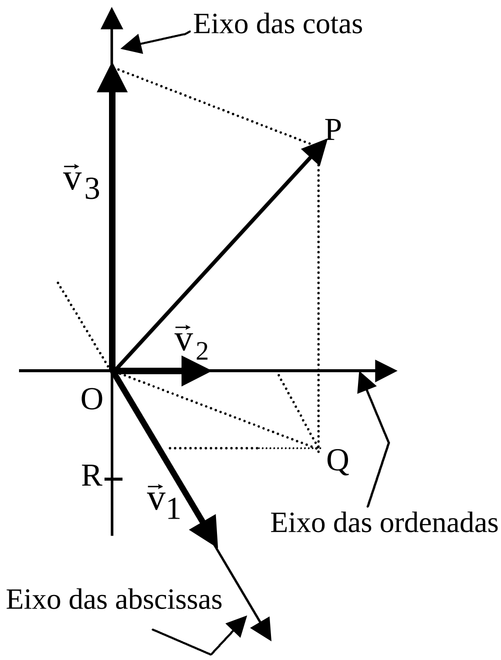
Indicamos um sistema de coordenadas cartesianas no espaço por $\boldsymbol{\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}}$.

O ponto O é chamado **origem do sistema** e os eixos que passam por O e tem as direções de $\boldsymbol{\vec{v}_1}$, $\boldsymbol{\vec{v}_2}$ **e** $\boldsymbol{\vec{v}_3}$, respectivamente, são chamados de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**.

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e seja P um ponto arbitrário do espaço. Chamamos **coordenadas do ponto P em relação ao sistema** $\boldsymbol{\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}}$, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$, ou seja, se $\overrightarrow{OP} = (a_1, a_2, a_3)$, então $P(a_1, a_2, a_3)$. Os números a_1, a_2, a_3 são denominados **abscissa, ordenada e cota do ponto P**, respectivamente.

Exemplo 1:

Na figura ao lado, temos:



1. $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$,

ou seja, $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$ e daí, $P\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$.

2. $\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$, daí, $Q\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$.

3. $\overrightarrow{OR} = \left(0, 0, -\frac{2}{3}\right)$, daí, $R = \left(0, 0, -\frac{2}{3}\right)$.

4. $\overrightarrow{OO} = (0,0,0)$, daí $O(0,0,0)$.

Propriedades:

Fixado um sistema de coordenadas $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e dados $\vec{v} = (a, b, c)$, $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$, temos as seguintes propriedades:

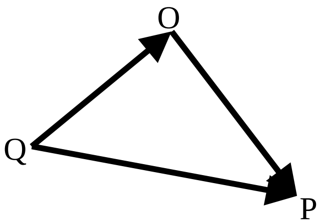
1. $\overrightarrow{QP} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$.

2. $P + \vec{v} = A(x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$.

3. O ponto médio de PQ é o ponto $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

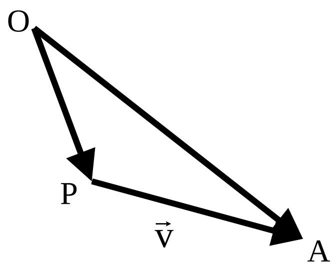
Prova:

1. Para demonstrarmos esta propriedade, escrevemos o vetor $\overrightarrow{QP}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{OP}$, ou seja,



$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} = (-x_2, -y_2, -z_2) + (x_1, y_1, z_1) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

2. Utilizando a definição de soma de um ponto com um vetor, temos que $\overrightarrow{PA} = \vec{v}$. Assim, o vetor $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = (x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$. Logo, $A(x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$.

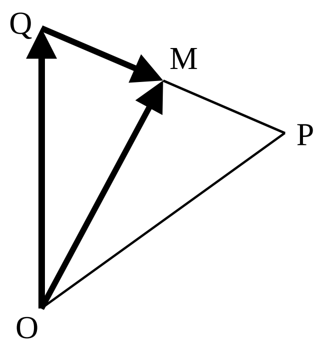


3. Podemos demonstrar a propriedade 3 escrevendo $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{OQ} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{QP}$.

Representando os vetores $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{QP}$ através de suas coordenadas, obtemos:

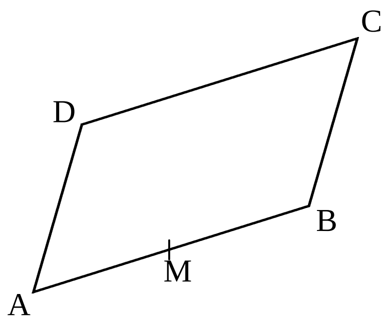
$$\overrightarrow{OM} = (x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Logo, $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$.



Exemplo 2:

Consideremos o paralelogramo ABCD, onde $A(1,0,2)$, $B(1,-1,2)$, $C(0,2,-2)$. Desejamos determinar as coordenadas dos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$, do vértice D e do ponto médio de AB.



Aplicando as propriedades anteriores temos:

$\vec{AB} = (1-1, -1-0, 2-2) = (0,-1,0)$,

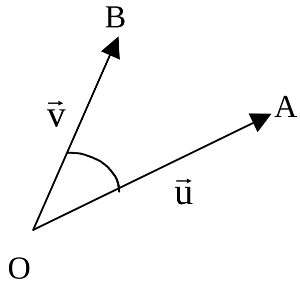
$\vec{BC} = (-1,3,-4)$,

$D = A + \vec{AD} = A + \vec{BC} = (0,3,-2)$ e o ponto médio de AB é $M(1, -1/2, 2)$.

CAPÍTULO II – PRODUTOS

2.1 Produto escalar

Definição 1: Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, e escolhido um ponto O qualquer, podemos escrever: $A = O + \vec{u}$ e $B = O + \vec{v}$**.** Chamamos **ângulo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$** a medida do ângulo $A\hat{O}B$ determinado pelas semi-retas OA e OB.



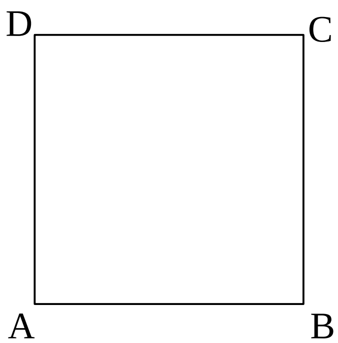
Indicamos $A\hat{O}B = (\vec{u}, \vec{v})$, onde $0 \le (\vec{u}, \vec{v}) \le \pi$.

Observemos que se $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido e se $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, estes vetores têm sentidos contrários.

Definição 2: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. **O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$,** indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o número real $\mathbf{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v})}$**.** Se um dos vetores for nulo temos $\mathbf{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$**.**

Exemplo 1

Considerando o quadrado seguinte, cujo lado mede 2u, temos:

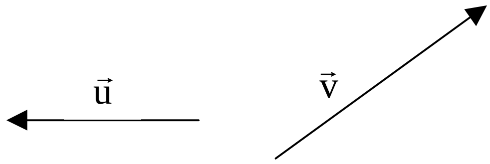


1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}|\cos 90^o = 0.$

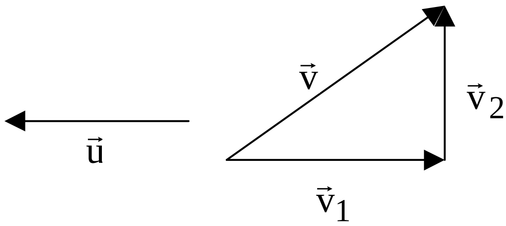
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|\cos 45^o = 2.2\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4.$

3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{CD}|\cos 180^o = -4.$

Definição 3: Sejam $\vec{u}$ um vetor não nulo e $\vec{v}$ um vetor qualquer.



O vetor $\vec{v}$ se exprime de maneira única na forma $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, onde $\vec{v}_1$ é paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}_2$ é ortogonal a $\vec{u}$.

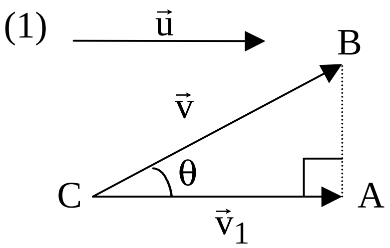


Chamamos o vetor $\vec{v}_1$, **de projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$.**

Indicamos $\mathbf{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{v}_1$.

Interpretação geométrica do produto escalar

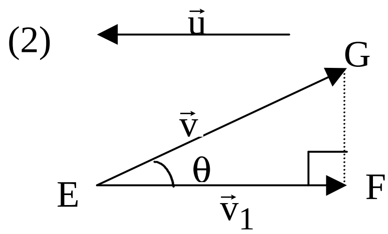
Se $\vec{v}$ é um vetor qualquer e $\vec{u}$ um vetor unitário, então $\vec{v}_1 = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{u}$. De fato, como $\vec{v}_1 \,//\, \vec{u}$, temos $\vec{v}_1 = t\,\vec{u}$. Basta mostra que $\vec{v}\cdot\vec{u} = t$. Para isso, consideremos os casos a seguir:



Em (1) o ângulo $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ é agudo. Nesse caso, temos t > 0, e daí $|\vec{v}_1| = |t||\vec{u}| = t$. Por outro lado, como o triâmgulo ABC é retângulo em A, podemos escrever:

$$t = |\vec{v}_1| = |\vec{v}|\cos\theta = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta = \vec{v}\cdot\vec{u}.$$

Em (2) o ângulo $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ é obtuso. Nesse caso, temos t < 0, e daí $|\vec{v}_1| = |t||\vec{u}| = -t$. Além disso, o ângulo $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi - \theta$. Considerando então o triângulo retângulo EFG, temos:



$$t = -|\vec{v}_1| = -|\vec{v}|\cos\theta = -|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta = |\vec{v}||\vec{u}|\cos(\pi - \theta) = \vec{v}\cdot\vec{u}.$$

Se $0 \neq |\vec{u}|$, temos $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \text{proj}_{\vec{u}^{o}}\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u}^{o})\vec{u}^{o}$. Chamamos $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}^{\mathbf{o}}$, **a medida algébrica da projeção de $\vec{\mathbf{v}}$ na direção de $\vec{\mathbf{u}}$** e indicamos **med alg proj$_{\vec{\mathbf{u}}}$** $\vec{v}$.

Exemplo 2:

Dados $\vec{u} \neq \vec{o}$, $|\vec{v}| = 6$ e $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^o$, temos que :

$$\text{med alg proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}^{o} = |\vec{v}||\vec{u}^{o}|\cos 60^o = 6.1.\frac{1}{2} = 3.$$

Daí, $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = 3\vec{u}^{o}$.

Exemplo 3:

Dados $\vec{a} \neq \vec{o}$, $|\vec{b}| = 8$ e $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^{\circ}$, temos que :

$$\text{med alg proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}^{\circ} = |\vec{b}||\vec{a}^{\circ}|\cos 120^{\circ} = 8 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

Daí, $\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = -4\vec{a}^{\circ}$

Propriedades do produto escalar

1. $\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$.

2. $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

3. $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$.

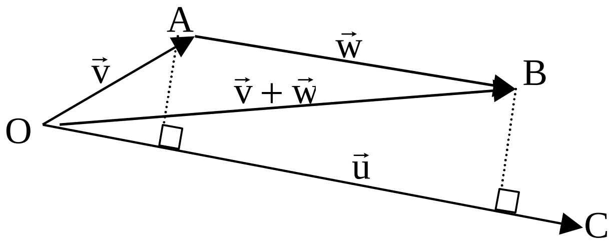
4. $t(\vec{v}.\vec{u}) = (t\,\vec{v}).\vec{u} = \vec{v}(t\,\vec{u})$.

5. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.

Nas propriedades acima, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores quaisquer, e t é um número real.

As quatro primeiras propriedades decorrem diretamente da definição do produto escalar. Faremos a seguir a prova da propriedade 5.

Se um dos vetores for nulo, a verificação é imediata. Consideremos, na figura ao lado, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não nulos e os pontos O, A, B e C tais que:



$$A = O + \vec{v},\ \ B = A + \vec{w}\ \text{ e }\ C = O + \vec{u}.$$

Inicialmente observamos que:

$$\text{med alg proj}_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w}) = \text{med alg proj}_{\vec{u}}\vec{v} + \text{med alg proj}_{\vec{u}}\vec{w}.$$

Ou seja, $(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u}^\circ = \vec{v}.\vec{u}^\circ + \vec{w}.\vec{u}^\circ$.

Daí, $(\vec{v}+\vec{w}).(|\vec{u}|\vec{u}^\circ) = \vec{v}.(|\vec{u}|\vec{u}^\circ) + \vec{w}.(|\vec{u}|\vec{u}^\circ)$.

Então, $(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u}$.

Pela propriedade 1, temos: $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.

Expressão cartesiana do produto escalar

Fixada uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, temos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}).(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$
$$= (x_1x_2)\vec{i}\cdot\vec{i} + (x_1y_2)\vec{i}\cdot\vec{j} + (x_1z_2)\vec{i}\cdot\vec{k} + (y_1x_2)\vec{j}\cdot\vec{i} + (y_1y_2)\vec{j}\cdot\vec{j} + (y_1z_2)\vec{j}\cdot\vec{k} +$$
$$+ (z_1x_2)\vec{k}\cdot\vec{i} + (z_1y_2)\vec{k}\cdot\vec{j} + (z_1z_2)\vec{k}\cdot\vec{k}$$

Como $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal, seus vetores satisfazem às relações:

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1.$$

Assim, a expressão acima se reduz a:

$$\mathbf{\vec{u} \times \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Observamos então que:

1) $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2$. Daí, $\boldsymbol{|\vec{u}| = \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2}}$

2) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$, ou seja,

$$\boldsymbol{\vec{u} \wedge \vec{v}\ \hat{U}\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0}$$

Daqui em diante, o sistema considerado será o ortonormal, exceto quando se explicitar o contrário.

Exemplo 4:

Dados os vetores $\vec{u} = (1,2,2)$ e $\vec{v} = (2,0,2)$, temos:

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 0 + 4 = 6.$

2) $|\vec{u}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$

3) $\vec{u}° = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{1}{3}(1,2,2) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right).$

4) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{6}{3.2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, logo, $(\vec{u}, \vec{v}) = 45°.$

5) $\vec{u} \perp \vec{w}$, sendo $\vec{w} = (0,2,-2)$, pois $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0.$

6) $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u}°)\vec{u}° = \left[(2,02) \cdot \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)\right]\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) =$

$= 2\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

7) med alg $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = 2$.

Cossenos diretores de um vetor

Fixada uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, chamamos **cossenos diretores de um vetor** $\boldsymbol{\vec{v} \neq \vec{0}}$**,** os cossenos dos ângulos que $\vec{v}$ forma com os vetores desta base.

Considerando $\vec{v} = (x, y, z)$, $\alpha = (\vec{v}, \vec{i})$, $\beta = (\vec{v}, \vec{j})$, e $\gamma = (\vec{v}, \vec{k})$, temos:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{x}{|\vec{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{y}{|\vec{v}|} \quad \text{e} \quad \cos\gamma = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} = \frac{z}{|\vec{v}|}.$$

Como $\vec{v}° = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, segue daí que , $\boldsymbol{\vec{v}° = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}$.

Daí, $\boldsymbol{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$.

Chamamos $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ **ângulo diretores de** $\boldsymbol{\vec{v}}$.

Exemplo 5:

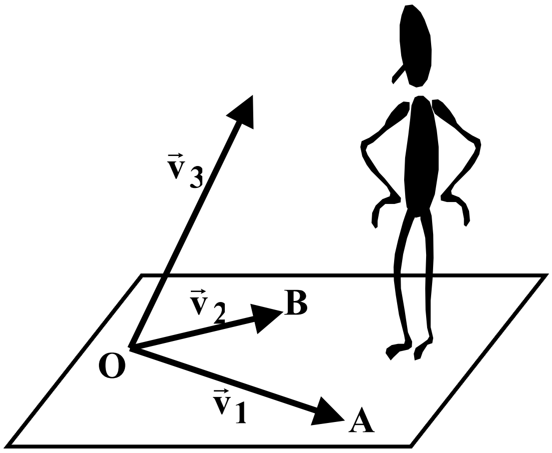
Dados $\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\vec{v}, \vec{j}) = \cos\beta = 0$, $(\vec{v}, \vec{k})$ obtuso e $|\vec{v}| = 5$, temos:

1) $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \dfrac{1}{2} - 0 = \dfrac{1}{2}$. Logo, $\cos\gamma = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

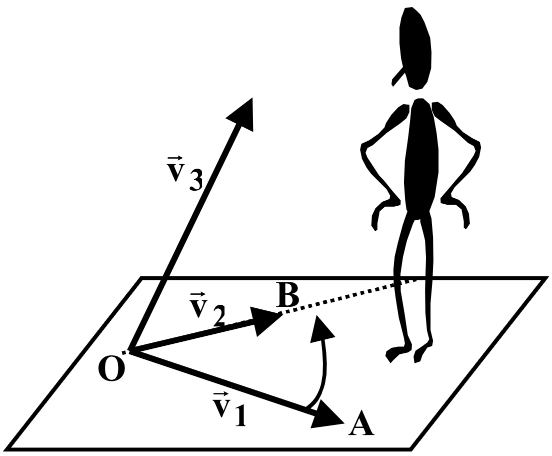
2) $\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{v}° = 5\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.2 Produto Vetorial

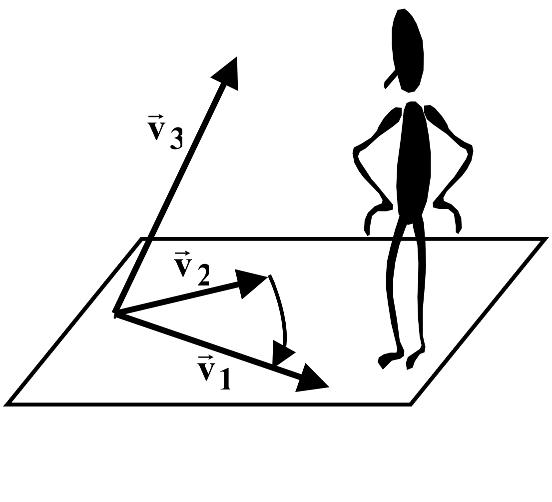
Para definirmos o produto vetorial entre dois vetores é indispensável distinguirmos o que são **bases positivas** e **bases negativas**. Para isso, consideremos uma base do espaço $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e um observador. Este observador deve estar com os pés em um plano que contém representantes de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ (os dois primeiros vetores da base), de modo que $\vec{v}_3$ (o terceiro vetor da base), esteja dirigido para os seus olhos. Neste plano, sejam $\overrightarrow{OA} = \vec{v}_1$ e $\overrightarrow{OB} = \vec{v}_2$.

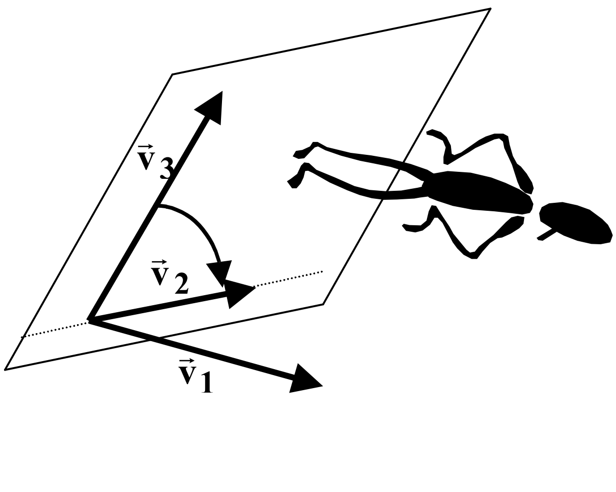


Consideremos agora, a rotação de menor ângulo em torno de O, que torna o vetor $\vec{v}_1$(o primeiro vetor da base) com mesmo sentido do vetor $\vec{v}_2$(o segundo vetor da base). Se esta rotação for no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, dizemos que a base é **positiva**. Caso contrário, dizemos que a base é **negativa**. Assim, a base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, ilustrada ao lado, é positiva.



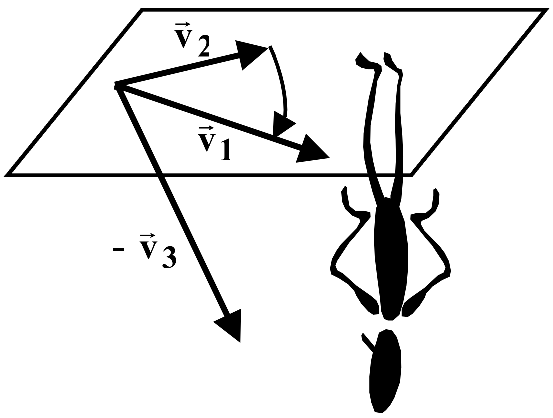
Observemos que as bases $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ e $\{\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1\}$ são negativas.





Chamamos atenção especial do leitor para o fato de que nem sempre o observador está no mesmo semi-espaço que nós. Consequentemente, o sentido da rotação que ele verá é contrário ao que nós vemos. Para ilustrar este fato, desenhe em uma folha de papel dois vetores LI com a mesma origem e considere uma rotação que torna um deles com mesmo sentido do outro. A folha de papel pode ser considerada com um plano, assim, a folha de papel divide o espaço em dois semi-espaços. Observemos então que, em um desses semi-espaços vemos esta rotação com um sentido. Se mudarmos de semi-espaço vemos esta rotação com um sentido contrário ao anterior.

A observação anterior é útil na identificação de bases positivas e negativas, quando o observador não está no mesmo semi-espaço que nós. Por exemplo, ao analizarmos a base $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, -\vec{v}_3\}$ vemos a rotação no sentido horário, porém o observador, por estar no semi-espaço distinto do qual nos encontramos, vê esta rotação no sentido anti-horário e portanto esta base é positiva.

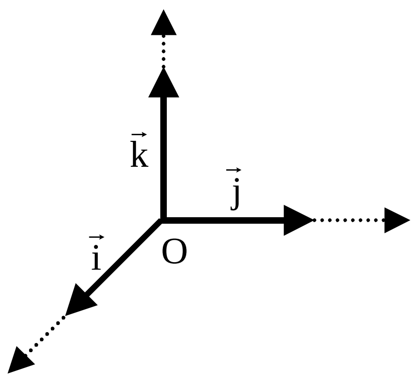


Exemplos

Consideremos o sistema $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ representado a seguir, temos que:

1. As bases $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, $\{\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}\}$ e $\{\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}\}$ são positivas.

2. As bases $\{\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}\}$, $\{\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}\}$ e $\{\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\}$ são negativas.



Definição: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não colineares. **O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$**, indicado $\vec{u}\times\vec{v}$, é um vetor, tal que:

1. $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v})$;
2. A direção de $\vec{u}\times\vec{v}$ é ortogonal a um plano que contém representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
3. A base $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ é positiva.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares então $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{o}$.

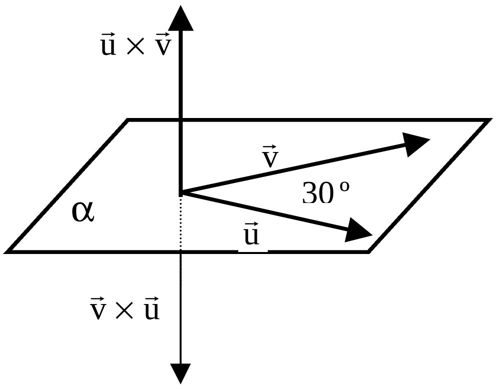
Exemplo 2

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores com representantes no plano α, onde $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=\sqrt{3}$ e $(\vec{u},\vec{v})=30^o$. Temos:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}30^o=2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}$$

e

$$|\vec{v}\times\vec{u}|=|\vec{v}||\vec{u}|\operatorname{sen}30^o=\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}$$



Assim, $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{v}\times\vec{u}|$, mas $\vec{u}\times\vec{v}$ e $\vec{v}\times\vec{u}$ são vetores opostos, como ilustra a figura.

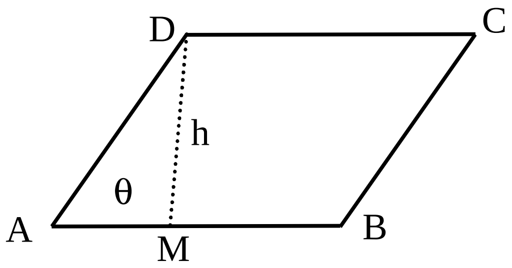
Exemplo 3

Dada a base ortonormal positiva $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, temos :

1. $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{o}$
2. $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ e $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$
3. $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$ e $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

Interpretação geométrica do produto vetorial

Consideremos o paralelogramo ABCD, abaixo.



Sabemos que a área S desse paralelogramo é:
S = base $\times$ altura, ou seja $S = |\overrightarrow{AB}| \cdot h$.
Do triângulo AMD, temos:

$$h = |\overrightarrow{AD}| \cdot \operatorname{sen}\theta .$$

Daí segue que, $\boxed{S = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \operatorname{sen}\theta = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}$.

Observamos também que a área T do triângulo ABD é:

$$\boxed{T = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{2}}$$

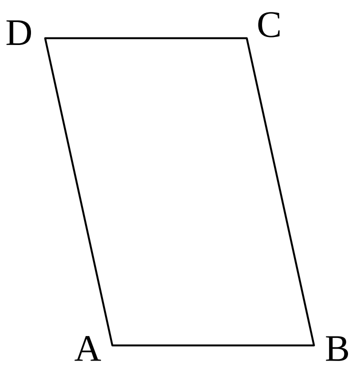
Exemplo 4:

Consideremos o paralelogramo ao lado, onde $A(1,1,0), B(0,1,2)$ e $C(4,1,0)$, temos:

$|\overrightarrow{AB}| = |(-1,0,2)| = \sqrt{5}$ e $|\overrightarrow{AD}| = |(4,0,-2)| = 2\sqrt{5}$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$



Segue daí que a área S do paralelogramo ABCD é:

$$S = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{3}{5} = 6 \text{ u.a.}$$

Propriedades do produto vetorial

1. $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$.
2. $(t\,\vec{v})\times\vec{u} = \vec{v}\times(t\,\vec{u}) = t\,(\vec{v}\times\vec{u})$.
3. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$.

Nas propriedades acima, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores quaisquer e t um número real. As propriedades 1 e 2 decorrem diretamente da definição de produto vetorial, e a prova da propriedade 3 será feita no parágrafo seguinte.

Expressão cartesiana do produto vetorial

Fixada uma base ortonormal positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$= (x_1x_2)\,\vec{i}\times\vec{i} + (x_1y_2)\,\vec{i}\times\vec{j} + (x_1z_2)\,\vec{i}\times\vec{k} +$$

$$+ (y_1x_2)\,\vec{j}\times\vec{i} + (y_1y_2)\,\vec{j}\times\vec{j} + (y_1z_2)\,\vec{j}\times\vec{k} +$$

$$+ (z_1x_2)\,\vec{k}\times\vec{i} + (z_1y_2)\,\vec{k}\times\vec{j} + (z_1z_2)\,\vec{k}\times\vec{k}.$$

Podemos então escrever:

$$\vec{u}\times\vec{v} = (y_1z_2 - z_1y_2)\,\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\,\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\,\vec{k}.$$

A expressão acima pode ser dada sob a forma de um determinante “simbólico”:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Exemplo 5

Dados os vetores $\vec{u}=(1,2,3)$, $\vec{v}=(3,1,2)$ e $\vec{w}=(2,4,6)$, temos:

1) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=(4-3)\,\vec{i}-(2-9)\,\vec{j}+(1-6)\,\vec{k},$

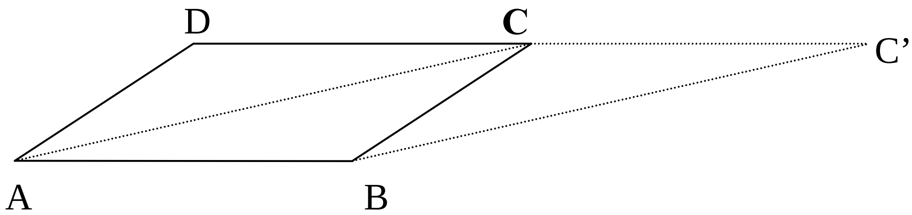
Daí, $\vec{u}\times\vec{v}=(1,7,-5)$.

2) $\vec{u}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{vmatrix}=(12-12)\,\vec{i}+(6-6)\,\vec{j}+(4-4)\,\vec{k}\,.$

Daí, $\vec{u}\times\vec{w}=(0,0,0)=\vec{o}$.

Exemplo 6

Consideremos, na figura a seguir, os paralelogramos ABCD e ABC'C.



Se S e S' são as áreas dos paralelogramos ABCD e ABC'C, respectivamente. Temos:

$$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| \quad \text{e} \quad S'=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

Como

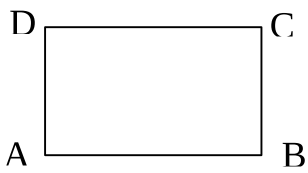
$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}\times(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})|=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=|\vec{o}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|,$$

podemos concluir que: $S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=S'$.

Considerando T a área do triângulo ABC temos:

$$\boxed{T=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|}{2}=\frac{|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}|}{2}}$$

Exemplo 7:



Considerando S a área o retângulo ao lado, onde $A(1,0,2), C(-2,3,3)$ e $\overrightarrow{AB}^{\circ}=(-1,0,0)$ temos:

$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ e $\overrightarrow{AC}=(-3,3,1)$.

Como $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$, temos que $\overrightarrow{AB}=\mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}^{\circ}}\overrightarrow{AC}=(-3,0,0)$.

Daí $S=|(-3,3,1)\times(-3,0,0)|=|(0,-3,9)|=\sqrt{9+81}=3\sqrt{10}.$

2.3 Produto Misto

Definição: Sejam $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores quaisquer. **O produto misto dos vetores $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$**, indicado por $[\vec{u},\vec{v},\ \vec{w}]$, é o número real $[\vec{u},\vec{v},\ \vec{w}]=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$.

Exemplo 1:

Dados os vetores $\vec{u}=(1,0,2),\vec{v}=(-1,1,3)$ e $\vec{w}=(0,3,-2)$, temos:

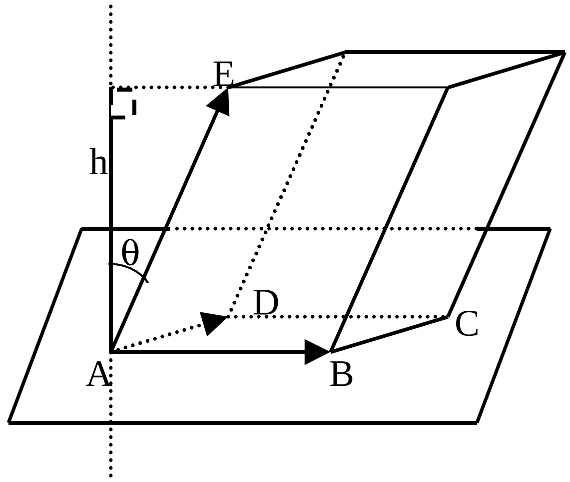
$$[\vec{u},\vec{v},\ \vec{w}]=[(1,0,2)\times(-1,1,3)]\cdot(0,3,-2)=(-2,-5,1)\cdot(0,3,-2)=-17$$

$$[\vec{v},\vec{u},\ \vec{w}]=[(-1,1,3)\times(1,0,2)]\cdot(0,3,-2)=(2,5,-1)\cdot(0,3,-2)=17\,.$$

Interpretação geométrica do produto misto

Seja o paralelepípedo de arestas AB, AD e AE. Sabemos que o volume V desse paralelepípedo é:

$$V = \text{área da base} \times \text{altura}.$$



Considerando a altura h desse paralelepípedo, em relação à base ABCD e aplicando nossos conhecimentos do cálculo vetorial podemos escrever: $V = |\vec{AB} \times \vec{AD}|\,h$.

Por outro lado, essa altura pode ser calculada como o módulo da projeção do vetor $\vec{AE}$ na direção do vetor $\vec{AB} \times \vec{AD}$, pois a direção deste vetor é ortogonal ao plano ABC. Assim podemos escrever:

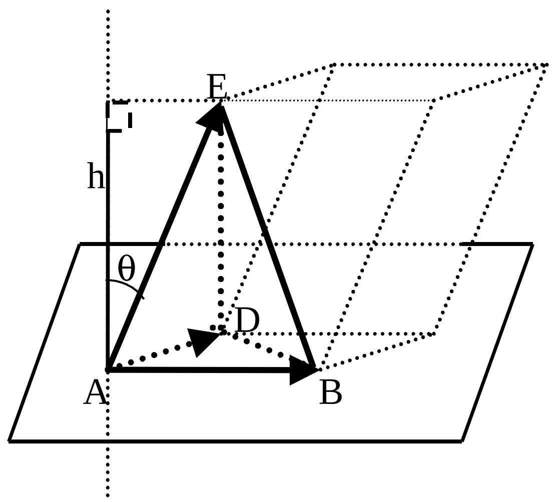
$$h = |\operatorname{proj}_{(\vec{AB} \times \vec{AD})} \vec{AE}| = |\vec{AE} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AD})^{\circ}| = ||\vec{AE}|\cos\theta| = |\vec{AE}||\cos\theta|,$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{AE}$ e $\vec{AB} \times \vec{AD}$.

Daí, $V = |\vec{AB} \times \vec{AD}||\vec{AE}||\cos\theta| = |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AE}| = |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]|$, ou seja,

$$\boxed{V = |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]|}$$

Consideremos agora o tetraedro de arestas AB, AD e AE. Seja V_T o volume desse tetraedro, assim, $V_T = \frac{1}{3}\,\text{área da base} \times \text{altura}$.



Considerando a base ABD desse tetraedro, observemos que a altura relativa a essa base coincide com a altura do paralelepípedo anterior.

Daí podemos escrever:

$$V_T = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\right|\,|\overrightarrow{AE}|\,|\cos\theta| = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AE}\right| = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}]\right|$$

Exemplo 2:

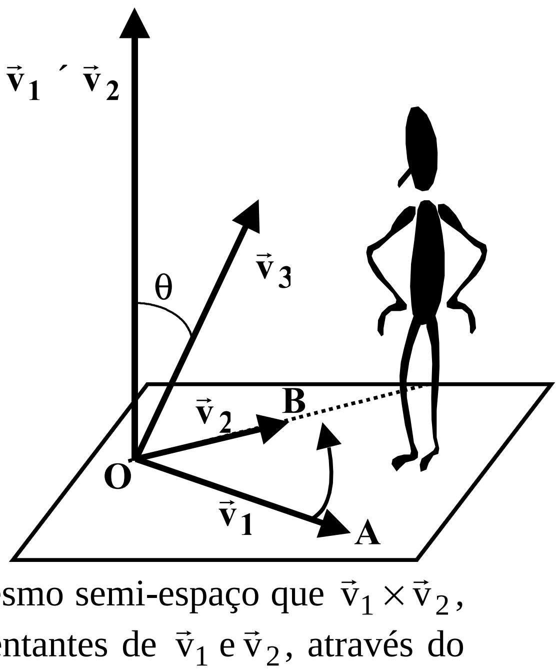
Consideremos o paralelepípedo de arestas OA, OB e OC, onde $\overrightarrow{OA} = (1,0,2)$, $\overrightarrow{OB} = (1,1,3)$ e $\overrightarrow{OC} = (2,1,0)$. O volume V deste paralelepípedo pode ser calculado como:

$$V = |[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]| = |(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}| = |(-2,-1,-1)\cdot(2,1,0)| = 5\ \text{u. v.}$$

E a altura do mesmo em relação à base OABD será:

$$h = \left|\ \text{proj}_{\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{OC}\right| = \left|(2,1,0)\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right| = \frac{5\sqrt{6}}{6}\ \text{u. c.}\ .$$

Observação: Consideremos uma base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ do espaço. Pela definição do produto vetorial a base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_1\times\vec{v}_2\}$ é positiva. Assim, se $\vec{v}_3$ estiver no mesmo semi-espaço que $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$, em relação a um plano que contiver representantes de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, a base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ será também positiva, já que o observador não muda de posição. Caso contrário a base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ será negativa.



Podemos verificar se $\vec{v}_3$ está, ou não, no mesmo semi-espaço que $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$, em relação a um plano que contiver representantes de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, através do

ângulo entre estes vetores. Ou seja, se este ângulo for agudo, então $\vec{v}_3$ está no mesmo semi-espaço que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, caso contrário, não.
Por outro lado, para determinarmos se o ângulo entre dois vetores é agudo ou obtuso, basta calcularmos o produto escalar entre eles. Assim, $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 > 0$, temos que o ângulo entre estes vetores é agudo, logo a base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ será positiva, caso contrário, a base será negativa.
Podemos então concluir que uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é positiva se o produto misto $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] > 0$ e será negativa se $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] < 0$.

Propriedades do produto misto

1. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

2. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v},]$.

3. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$.

4. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

5. $[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$.

6. $t\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [t\,\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, t\,\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, t\,\vec{w}]$.

Nas propriedades acima, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores quaisquer, e t é um número real. Faremos a seguir suas provas:

1. "$\Rightarrow$" Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, então o volume do paralelepípedo cujas arestas são representantes de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, é zero. Assim, esse paralelepípedo é degenerado, e portanto, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

   "$\Leftarrow$" É imediata.

2. Temos que $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]| = |[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v},]|$, como volume de um mesmo paralelepípedo. Se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são L D, então

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]| = |[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v},]| = 0$$

Se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são L I, então as bases $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}, \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\}$ e $\{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\}$ pertencem a mesma classe. Logo,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v},]$$

Nas provas das propriedades seguintes, usaremos as propriedades dos produtos escalar e vetorial já vistas.

3. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = -(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} = -[(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$

2. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Usaremos agora as propriedades acima para demonstrar a distributividade do produto vetorial em relação à adição de vetores, ou seja:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}\,.$$

Mostraremos que : $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w}) = \vec{o}$.

Considerando $\vec{a} = \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w})$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{a} &= \vec{a} \cdot \{\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w})\} \\
&= \vec{a} \cdot [\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})] - \vec{a} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{a} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \\
&= (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} - (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} \\
&= (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{o}.
\end{aligned}$$

Portanto $\vec{a} = \vec{o}$.

5. $[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \{(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \times \vec{v}\} \cdot \vec{w} = \{\vec{u}_1 \times \vec{v} + \vec{u}_2 \times \vec{v}\} \cdot \vec{w} =$
$= (\vec{u}_1 \times \vec{v}) \cdot \vec{w} + (\vec{u}_2 \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + (\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$

6. $[t\,\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (t\,\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times t\,\vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, t\,\vec{v}, \vec{w}]$.

Analogamente podemos obter as outras igualdades.

Expressão cartesiana do produto misto

Fixada uma base ortornomal positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, temos:

$$\begin{aligned}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2,\ z_1 x_2 - x_1 z_2,\ x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot (x_3, y_3, z_3) \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\, x_3 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\, y_3 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\, z_3\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever:

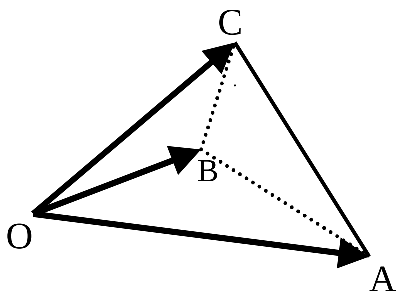
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\, x_3 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\, y_3 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\, z_3.$$

A expressão acima pode ser dada sob a forma do determinante:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 3:

Do tetraedro de arestas OA, OB, e OC, sabemos que :
$\vec{OA} = (x,3,4)$, $\vec{OB} = (0,4,2)$ e $\vec{OC} = (1,3,2)$.
Calcule o valor de x, para que o volume desse tetraedro seja igual a 2 u. v.



Sabemos que o volume V_T do tetraedro é dado por:

$$V_T = \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]|$$

Assim,

$$V_T = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |2x - 10|.$$

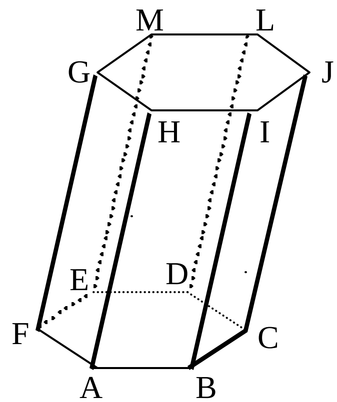
Como V_T = 2 u.v, temos: $\frac{1}{6} |2x - 10| = 2$.

Logo, x = 11 ou $x = -1$.

Exercícios

Sequência I

1. Considerando o prisma abaixo, cuja base é um hexágono regular, classifique em verdadeira ou falsa, as sentenças abaixo, justificando cada resposta.



a) $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{DI}$ é L.D.

b) $\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}$ são L.I.

c) $\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{FE}$ são L.I.

d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB}$ e $\overrightarrow{MF}$ são L.D.

e) $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{MF}$ são L.D.

f) $\overrightarrow{GM}$ e $2\overrightarrow{AH}$ são coplanares.

g) $\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}$ e $\overrightarrow{FM}$ são L.I.

h) $\overrightarrow{FM}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}$ e $\overrightarrow{GM}$.

i) $\overrightarrow{MG}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{GH}$.

j) $F = E + \overrightarrow{LM}$

l) $\overrightarrow{FA}^{\circ} = (2\,\overrightarrow{JI})^{\circ}$

m) $\overrightarrow{FE}^{\circ} + (2\overrightarrow{ML})^{\circ} = (\overrightarrow{FE} + 2\overrightarrow{ML})^{\circ}$

Nos exercícios de 2 a 5, considere os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 2k$ e $\vec{w} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$.

2. Verifique se os vetores são L.D. em cada item abaixo:

a) $\vec{u}$ b) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ c) $\vec{o}$ d) $\vec{u}$ e $\vec{o}$ e) $\vec{u}$ e $(4,-2,4)$

f) $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ g) $\vec{u}, \vec{v}, (1,2,3)$ e $(2,1,4)$ h) $\vec{u}, \vec{v}$ e $(7,4,0)$.

3. Determine:

a) $2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}$.

b) as coordenadas do ponto B, onde $A = (1,0,-2)$ e $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

c) as coordenadas do ponto M, onde M é ponto médio do segmento AB, do item(b).

4. Escreva se possível:

a) $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{a} = (4,-2,4)$.
b) $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{o}$.
c) $\vec{o}$ como combinação linear de $\vec{u}$.
d) $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{u}$.
e) $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{a} = (4,-2,4)$.
f) $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{a} = (4,-2,4)$.
g) $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{w}$.

5. Determine:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e $\vec{u} \cdot \vec{w}$ b) $|\vec{u}|$ e $\vec{u}^{\circ}$ c) $(\vec{u},\vec{v})$ e $(\vec{u},\vec{w})$

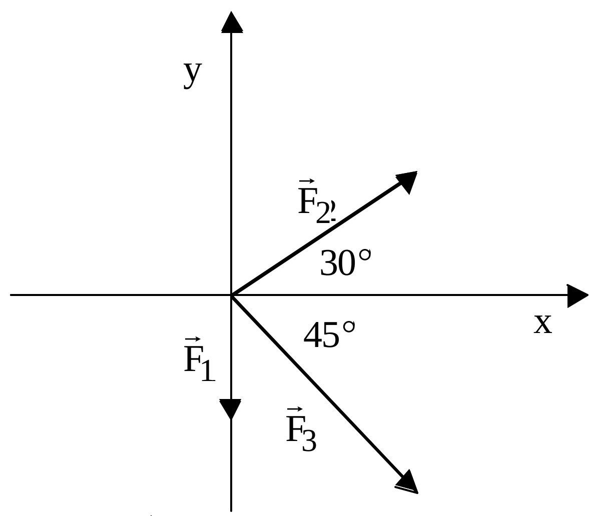
d) Um vetor não nulo ortogonal a $\vec{v}$.
e) A projeção de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$.
f) A projeção de $\vec{u}$ na direção de $\vec{w}$.
g) A medida algébrica da projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$.
h) O versor de $\vec{b}$, onde $\vec{b} \,//\, \vec{u}$.
i) Um vetor paralelo a $\vec{u}$ e de módulo 9.
j) O vetor $\vec{c}$, sabendo que seus ângulos diretores são agudos, onde $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ e $|\vec{c}| = |\vec{w}|$.
l) $\vec{v} \times \vec{w}$
m) Um vetor unitário ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
n) Uma base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, onde $\vec{e}_1 \,//\, \vec{u}$.
o) Uma base positiva $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, onde $\vec{f}_1 = \vec{v}$.
p) O vetor $\vec{d}$, tal que $\vec{d} \times \vec{u} = \vec{o}$ e $\vec{d} \cdot \vec{v} = -2$.
q) A área do triângulo ABC, onde $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
r) $[\vec{u},\vec{v},\vec{k}]$
s) O volume do paralelepípedo de arestas AB, AC e AD, onde $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$.

Sequência II

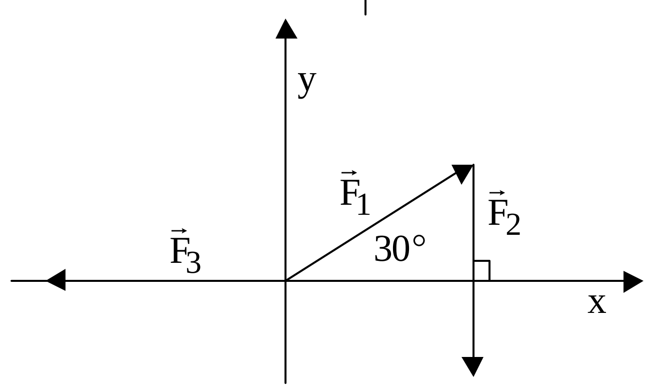
1. Sabendo que A(0,0,0), B(2,1,–2) e C(0,0,5) são vértices de um triângulo, determine um vetor que tem a direção da bissetriz do ângulo interno $B\hat{A}C$.

2. Determine a resultante das forças em cada item a seguir:

a) $|\vec{F}_1| = 80$ kgf
$|\vec{F}_2| = 150$ kgf
$|\vec{F}_3| = 180$ kgf



b) $|\vec{F}_1| = 120$kgf
$|\vec{F}_2| = 100$kgf
$|\vec{F}_3| = 120$kgf



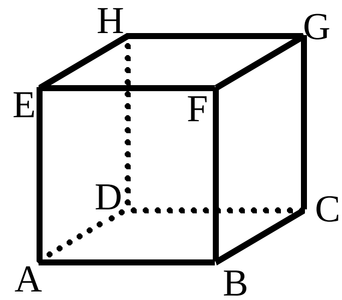
3. Exiba, se possível, os exemplos abaixo. Se impossível explique porque.

a) Uma base do espaço que contenha os vetores $(1,-2,3)$ e $(-2,4,6)$.

b) Três vetores L.I. que não formem uma base do espaço.

c) Um vetor não nulo, paralelo a $\vec{u} = (1,0,2)$ e ortogonal a $\vec{w} = (-1,2,3)$.

4. Do cubo ao lado, sabemos que: $A(2,1,0), B(2,4,0)$ e $\overrightarrow{AD}^{\circ} = (0,0,1)$. Determine as coordenadas:



a) do vetor $\overrightarrow{AC}$;

b) do ponto E;

c) do vetor $\overrightarrow{AL}$, sabendo que $\overrightarrow{FL} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.

d) do vetor $\overrightarrow{CG}$ em relação à base $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right\}$;

5. De um losango ABCD sabemos que $A(1,0,2)$, $B(2,-1,2)$ e a diagonal AC é paralela ao vetor $\vec{u} = (-1,2,2)$. Determine as coordenadas dos outros vértices.

6. Sabendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{w}| = 4$ e $(\vec{u}, \vec{w}) = 60°$, calcule:

a) $|\vec{u} + \vec{w}|$ b) $|\text{proj}_{\vec{w}}\ \vec{u}|$ c) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{w})$

7. Determine o vetor $\vec{v}$ sabendo que $|\vec{v}| = \sqrt{3}$ e que seus ângulos diretores são agudos e congruentes.

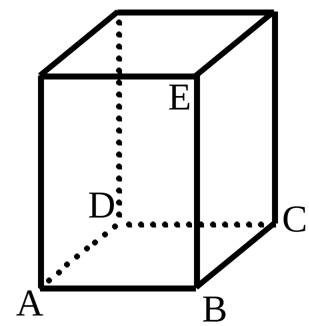
8. De um triângulo ABC, sabemos que $A(1,0,2)$, $B(3,1,1)$ e $\overrightarrow{AC}^{\circ} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Determine a altura do triângulo ABC em relação à base AC.

9. De um triângulo ABC, sabemos que: $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AC}| = 3$ e $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\sqrt{3}$. Determine a área deste triângulo.

10. Sejam AB, AD, e AE arestas de um paralelepípedo retângulo de volume 12 u.v. Sabemos que $A(0,0,0)$, $C(4,1,0)$ e $\overrightarrow{AB}^{\circ} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Determine: a) A área do base ABCD.
b) As coordenadas do vértice E.

11. Do paralelepípedo retângulo ao lado, temos:



a) $A(2,1,0)$, $C(3,2,0)$ e $|\vec{BE}| = 3$.

b) Dois dos ângulos diretores de $\vec{AB}$ são $\alpha = \gamma = 45°$.

Determine o volume deste paralelepípedo.

12. De um tetraedro ABCD sabemos que:

a) $A(4, 0, 3), B(-8, 4, 1), D(3, -1, 0)$ e $|\vec{AC}| = 2\sqrt{2}$.

b) Os ângulos diretores de $\vec{AC}$ são $\alpha = \gamma = 45°$.

Determine o volume deste tetraedro.

13. Dados os vetores $\vec{OA} = (1, y, 2)$, $\vec{OB} = (2, 0, 1)$ e $\vec{OC} = (0, 3, 1)$, determine o valor de y para que a altura do tetraedro OABC, em relação à base OBC, seja igual a $\frac{1}{7}$ u. c.

14. De um paralelepípedo de base ABCD sabemos que:

a) A(0 ,1 ,1), B(2, 0, 1) e C(-1, 1, 0) ;

b) Os ângulos diretores de $\vec{AE}$ são agudos e $\alpha = 60°$ e $\beta = 45°$.

Determine as coordenadas de vértice E, para que o volume deste paralelepípedo seja igual a $4\sqrt{2}$ u.v.

15. De um tetraedro ABCD, sabemos que:

a) A(0,0,0), D(1,5,t); $t \in IR$ e $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8$;

b) $\vec{AB}° = (1,0,0)$ e $\vec{AC}° = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$;

c) o triângulo ABC é equilátero.

Determine as coordenadas do vértice D para que o volume deste tetraedro seja igual a $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ u.v.

RESPOSTAS

Sequência I

5. a) 1 e 0 b) 3 e $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ c) $\text{arc}\cos\frac{\sqrt{6}}{54}$ e $90°$

d) $\left(x, y, \frac{5x+5y}{2}\right)$; $x, y \in IR$ e $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ e) $\left(\frac{5}{54},\frac{5}{54},-\frac{1}{27}\right)$

f) (0,0,0) g) $\frac{1}{3}$ h) $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ ou $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

i) (6,-3,6) ou (-6,3,-6) j) $\left(\frac{3\sqrt{5}}{2},\frac{3\sqrt{10}}{2},\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ l) (12,-6,15)

m) $\left(-\frac{8\sqrt{485}}{485},\frac{14\sqrt{485}}{485},\frac{15\sqrt{485}}{485}\right)$ ou $\left(\frac{8\sqrt{485}}{485},-\frac{14\sqrt{485}}{485},-\frac{15\sqrt{485}}{485}\right)$

p) $(-4,2,-4)$ q) $\frac{\sqrt{485}}{2}$ u.a. r) 15 s) 60 u.v.

Sequência II

1. $t\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$; $t \in IR^*$

2. a) $\vec{R} = \left(75\sqrt{3}+90\sqrt{2}, -5-90\sqrt{2}\right)$ b) $\vec{R} = \left(60\sqrt{3}-120, -40\right)$

4. a) $\vec{AC} = (0,3,3)$ b) E(5,1,0) c) $\vec{CG} = (0,0,1)$ d) $\vec{AL} = (3,2,0)$

5. $C\left(\frac{5}{3},-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$ e $D\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

6. a) $2\sqrt{7}$ b) 1 c) 8

7. $\vec{v} = (1,1,1)$ **8.** $h = \frac{\sqrt{22}}{2}$ u.c. **9.** $S = \frac{3}{2}$ u.a.

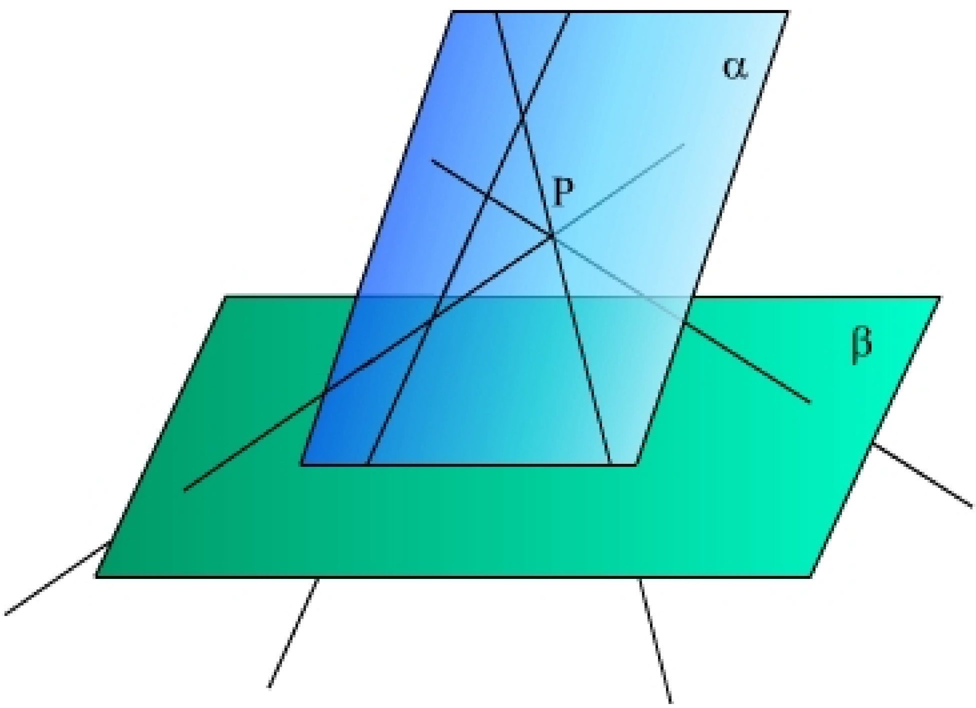
10. a) S = $6\sqrt{2}$ u.a. b) $E\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ou $E\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

11. $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ u.v. **12.** $V = \frac{2}{3}$ u.v. **13.** y = 4 ou y = 5

14. $E\left(2,\ 2\sqrt{2}+1,\ 3\right)$ **15.** D(1,5,2) ou D(1,5,−2)

☆

Retas e Planos



Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática

2000

Introdução

Este texto é uma versão revisada e atualizada do texto " Retas e Planos" de autoria das professoras Ana Maria Santos Costa, Heliacy Coelho Souza e Maria Christina Fernandes Cardoso. Esta versão, do mesmo modo que a primeira, é um recurso didático utilizado na Disciplina Matemática Básica II - Mat. 002 do Departamento de Matemática da UFBA.

Esperamos contar com o auxílio dos leitores através de críticas, sugestões e correções.

Salvador, 01 de novembro de 1999

As autoras,

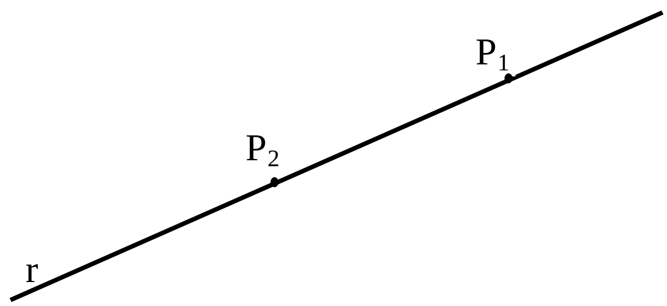
Maria Christina Fernandes Cardoso
Sonia Regina Soares Ferreira
Verlane Andrade Cabral

Índice

CAPÍTULO I – EQUAÇÕES DA RETA

1.1 Equação vetorial

Um dos axiomas da geometria euclidiana diz que dois pontos distintos determinam uma reta. Seja r a reta determinada pelos pontos P_1 e P_2.

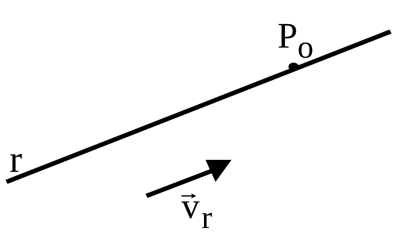


Um ponto P pertence à reta r se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são colineares. Como P_1 e P_2 são distintos, o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é não nulo, então existe um escalar λ tal que $\overrightarrow{P_1P} = \lambda\,\overrightarrow{P_1P_2}$. Assim, P pertence a r se, e somente se, $P = P_1 + \lambda\overrightarrow{P_1P_2};\ \ \lambda \in IR$. Podemos então concluir que todo ponto da reta r satisfaz à equação:

$$\mathbf{X = P_1 + \lambda\,\overrightarrow{P_1P_2};\quad \lambda \in IR},$$

que é chamada de **equação vetorial** da reta r.

Observemos que o fundamental na determinação da equação vetorial de uma reta, é conhecermos um ponto desta reta e um vetor (não nulo) na sua direção. Um vetor na direção da reta r é chamado vetor direção da reta r, e indicado por $\vec{v}_r$.



$r : X = P_o + h\vec{v}_r;\ h \in IR$

Assim, cada escalar h determina um único ponto P pertencente a r e, reciprocamente, para cada ponto de r, existe um único valor real h tal que $P = P_o + h\,\vec{v}_r$.

1.2 Equações paramétricas e simétricas

Fixado um sistema de coordenadas, sejam $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e $\vec{v}_r = (a, b, c)$. A equação vetorial da reta r, determinada por P_o e $\vec{v}_r$ é:

$$r : (x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + h\,(a, b, c);\ h \in IR\ ,$$

que equivale ao sistema $r : \begin{cases} x = x_o + h\,a \\ y = y_o + h\,b \\ z = z_o + h\,c \end{cases} ;h \in IR$ ①

As equações acima são chamadas de **equações paramétricas** da reta r.

Se $abc \neq 0$, eliminando o parâmetro h do sistema ①, obtemos

$$\mathbf{r : \frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}} \quad ②$$

Estas equações são denominadas **equações simétricas** da reta r.
As equações em ②, poderiam ser obtidas observando o paralelismo que deve existir entre os vetores:

$$\overrightarrow{P_oP} = (x - x_o, y - y_o, z - z_o) \text{ e } \vec{v}_r = (a, b, c), \quad abc \neq 0.$$

Exemplos

1. Determine uma equação da reta r que:

a) passa pelos pontos $P_1(3,-1,1)$ e $P_2(2,1,2)$;

b) passa pelo ponto P(4,1,0) e contém representantes do vetor $\vec{u} = (2,6,-2)$.

Solução:

a) Como P_1 e P_2 são distintos, determinam uma reta de equação vetorial

$X = P_1 + h\,\overrightarrow{P_1P_2};\ h \in IR$, isto é, $r : (x, y, z) = (3,-1,1) + h\,(-1,2,1); h \in R$.

b) $r: x-4=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-1}$ (equações simétricas da reta).

2. Verifique se o ponto $P(-1,0,2)$ pertence às retas:

a) $r:(x,y,z)=(-7,-3,-7)+h\,(2,1,3);\, h\in IR$

b) $s:\begin{cases} x=-3+h \\ y=-1+h\,;\, h\in IR \\ z=2\,h \end{cases}$

c) $t:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{2}$

Solução:

a) $P\in r$ se, e somente, existe $h_o \in IR$ tal que:

$$(-1,0,2)=(-7,-3,-7)+h_o\,(2,1,3).$$

Ou seja, $(6,3,9)=h_o(2,1,3)$. É fácil verificar que $h_o = 3$ torna a igualdade acima verdadeira, logo $P\in r$.

b) $P\in s$ se, e somente, existe $h_o \in IR$ tal que $\begin{cases} -1=-3-h_o \\ 0=-1+h_o \\ 2=2\,h_o \end{cases}$

o que é impossível, pois, da primeira equação temos $h_o = -2$ e da segunda $h_o = 1$. Logo, $P\notin s$.

c) $P\in t$ se, e somente, $\frac{-1+1}{2}=\frac{0}{3}=\frac{2-4}{2}$. Como $0\neq -1$ temos que $P\notin t$.

3. Seja $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=z$. Determine uma equação de r nas formas vetorial e paramétrica.

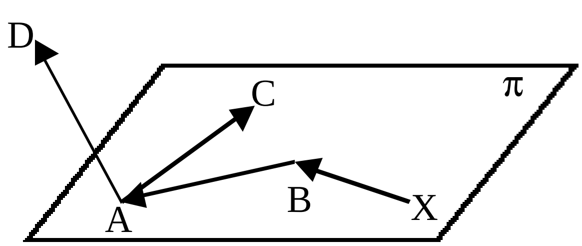
Solução:

Das equações simétricas de r temos $\vec{v}_r = (2,4,1)$ e $P(1,-2,0)$ é um ponto da reta r. Assim, $(x, y, z) = (1,-2,0) + h\,(2,4,1);\ h \in IR$ e $\begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = -2 + 4h\ ; h \in IR \\ z = h \end{cases}$, são equações da reta r nas formas vetorial e paramétrica, respectivamente.

CAPÍTULO II - EQUAÇÕES DO PLANO

2.1 Equação Vetorial

Um dos axiomas da Geometria Espacial nos diz que três pontos não colineares determinam um plano. Consideremos então π o plano determinado pelos pontos A, B e C. Desejamos encontrar uma condição necessária e suficiente para que um ponto X pertença ao plano π. Observemos então que, como A, B e C são não colineares, os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{AC}$ são linearmente independentes com representantes em π. Portanto, um ponto X pertence ao plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{XB}$ é coplanar com os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{AC}$.



Assim, existem escalares t e h tais que $\overrightarrow{XB} = t\,\overrightarrow{BA} + h\,\overrightarrow{AC}$.

Daí, um ponto X pertence ao plano π se, e somente se,

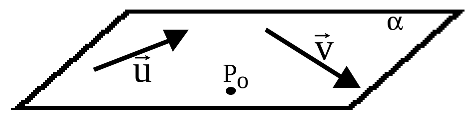
$$X = B + t\,\overrightarrow{BA} + h\,\overrightarrow{AC}\ ;\ t, h \in IR.$$

Esta equação é chamada de **equação vetorial do plano p.**

Observemos que o fundamental na determinação da equação de um plano é conhecermos um ponto deste plano e dois vetores linearmente independentes, com representantes no mesmo. Um vetor com representante em um plano é dito **paralelo** ao plano.

Assim, uma equação vetorial de um plano α paralelo aos vetores LI $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e que passa por P_o é :

$$X = P_o + t\vec{u} + h\vec{v};\ t, h \in IR .$$



Observemos ainda que para cada ponto X do plano, existe um único par ordenado (t, h) satisfazendo a esta equação e reciprocamente.

2. 2 Equações Paramétricas

Fixemos um sistema de coordenadas do espaço. Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ vetores linearmente independentes paralelos ao plano α e $P_o(x_o, y_o, z_o)$ um ponto de α . Assim, uma equação vetorial do plano α pode ser escrita como:

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t(a_1, b_1, c_1) + h(a_2, b_2, c_2)\ ,\ t, h \in IR .$$

A equação acima equivale ao sistema:

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t + a_2 h \\ y = y_o + b_1 t + b_2 h\ ; \quad t, h \in IR . \\ z = z_o + c_1 t + c_2 h \end{cases}$$

As equações deste sistema são chamadas **equações paramétricas do plano a .**

Exemplos

1. Dê uma equação vetorial do plano determinado pelos pontos $A = (1,1,0)$, $B = (-1,2,1)$ e $C = (3,2,1)$.

Solução:

Como os vetores $\overrightarrow{AB} = (-2,1,1)$ e $\overrightarrow{CA} = (-2,-1,-1)$ são linearmente independentes, os pontos A, B e C não são colineares, logo determinam um único plano. Uma equação vetorial do plano ABC é :

$$(x, y, z) = (1,1,0) + t(-2,1,1) + h(2,1,1) \; ; \quad t, h \in IR$$

2. Dê as equações paramétricas do plano paralelo aos vetores $\vec{u} = (-1,2,1)$, $\vec{v} = (1,0,3)$ e que passa pelo ponto $P = (2,4,-1)$.

Solução:

Como os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes então P, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ determinam um plano de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 - t + h \\ y = 4 + 2t \\ z = -1 + t + 3h \end{cases} \quad ; \qquad t,\ h \in IR$$

3. Dê uma equação vetorial do plano β, dado a seguir;

$$\beta : \begin{cases} x = 1 + 2h - t \\ y = -2 + h + 3t \\ z = 3 + 5h \end{cases} \quad ; \qquad t, h \in IR$$

Solução:

Das equações paramétricas de β temos que $P = (1,-2,3)$ é um ponto de β e os vetores $\vec{u} = (2,1,5)$ e $\vec{v} = (-1,3,0)$ são linearmente independentes com representantes em β. Assim, uma equação vetorial de β é dada por ;

$$\beta : \ (x, y, z) = (1,-2,3) + t(2,1,5) + h(-1,3,0) \; ; \quad t, h \in IR \, .$$

4. Determine as equações paramétricas do plano α paralelo ao vetor $\vec{u} = (5,1,2)$ e que passa pelos pontos $A = (3,-1,1)$ e $B = (2,-1,0)$.

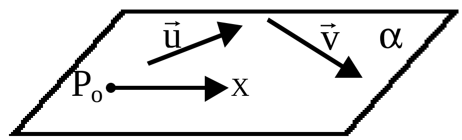
Solução:

Observemos que os vetores $\vec{u}=(5,1,2)$ e $\overrightarrow{AB}=(-1,0,-1)$ são linearmente independentes com representantes no plano α . Assim, as equações paramétricas de α são:

$$\alpha:\begin{cases} x=3+5h-t \\ y=-1+h \\ z=1+2h-t \end{cases} \quad ; \ t,h\in IR.$$

2. 3 Equação Geral

Seja α o plano determinado pelo ponto $P(x_o,y_o,z_o)$ e pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Lembremos que um ponto X(x, y, z) pertence a α se, somente se, os vetores $\overrightarrow{PX}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares.



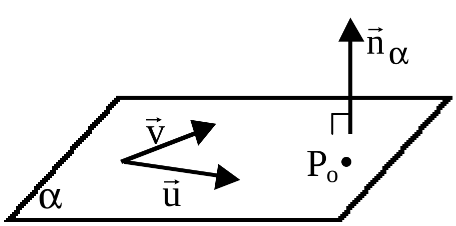
Assim, $[\overrightarrow{PX},\vec{u},\vec{v}]=0$, ou seja, $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{P_oX}=0$. Considerando $\vec{u}\times\vec{v}=(a,b,c)$, podemos escrever:

$$(a,b,c)\cdot(x-x_o,y-y_o,z-z_o)=0,$$

ou equivalentemente,

$$ax+by+cz+d=0 \ , \qquad ①$$

onde $d=-(ax_o+by_o+cz_o)$. A equação ① é chamada de **equação geral do plano a.**



Dizemos que um vetor não nulo é **normal** a um plano se, somente se, é ortogonal a todos os vetores que possuem representantes neste plano. É usual indicarmos um vetor normal ao plano α por $\vec{n}_\alpha$.

Observemos que os coeficientes **a**, **b** e **c** da equação geral do plano α correspondem às coordenadas de um vetor normal a este plano.

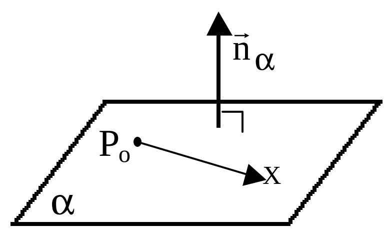
Exemplos

1. Determine uma equação geral do plano α que passa pelo ponto $P=(3,-1,2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}=(-1,1,2)$ e $\vec{v}=(1,-1,0)$.

Solução 1:
Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI e têm representantes em α, podemos considerar $\vec{n}_\alpha$ paralelo ao produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}=(2,2,0)$. Considerando $\vec{n}_\alpha=(2,2,0)$, uma equação geral do plano α tem a forma $2x+2y+d=0$, para um certo valor real de d. Como o ponto P pertence ao plano α suas coordenadas satisfazem a esta equação, assim temos: $2.3+2.(-1)+0.2+d=0$, daí, $d=-4$. Logo, $2x+2y-4=0$ é uma equação do plano α.

Solução 2:
Seja $\vec{n}_\alpha=(1,1,0)$ e X um ponto genérico de α.

Então, $\overrightarrow{P_oX}\cdot\vec{n}_\alpha=0$, ou equivalentemente,



$$(x-3,y+1,z-2)\cdot(1,1,0)=0.$$

Daí, uma equação geral do plano α é $x+y-2=0$.

2. Determine um vetor normal ao plano α nos seguintes casos:

a) $\alpha:\ X=(1,0,1)+t(2,-1,3)+h(1,1,0)$; $t,h\in IR$.

b) $\alpha:\begin{cases}x=2+3t\\ y=1+2t-h;\quad t,h\in IR.\\ z=-t+2h\end{cases}$

c) $\alpha:\ 2x-3y+z-1=0$

Solução :

a) $\vec{n}_\alpha=(2,-1,3)\times(1,1,0)=(-3,3,3)$

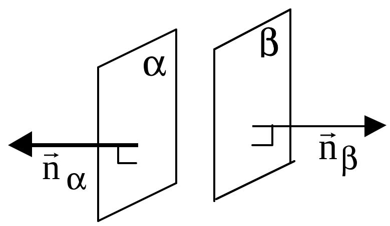
b) $\vec{n}_\alpha=(3,2,-1)\times(0,-1,2)=(3,-6,-3)$

c) $\vec{n}_\alpha=(2,-3,1)$

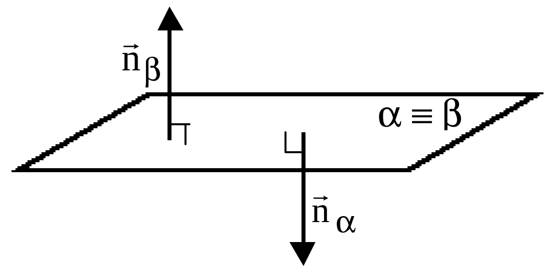
CAPÍTULO III - POSIÇÕES RELATIVAS DE DOIS PLANOS

No espaço IR^3, dois planos α e β são paralelos ou concorrentes. Se os planos α e β são paralelos temos:

Paralelos distintos : $\alpha \cap \beta = \phi$



Paralelos coincidentes : $\alpha \equiv \beta$



Observemos que dois planos são paralelos se, somente se , seus vetores normais são paralelos. Consideremos $\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Temos que α e β são paralelos se, somente se, existe um real k tal que:

$$\begin{cases} a_1 = ka_2 \\ b_1 = kb_2 \\ c_1 = kc_2 \end{cases}$$

Se os planos α e β são paralelos e, além disso, possuem um ponto em comum, então eles são coincidentes. Suponhamos que $P(x_1, y_1, z_1)$ seja esse ponto comum. Assim, as coordenadas de P satisfazem às equações de α e β :

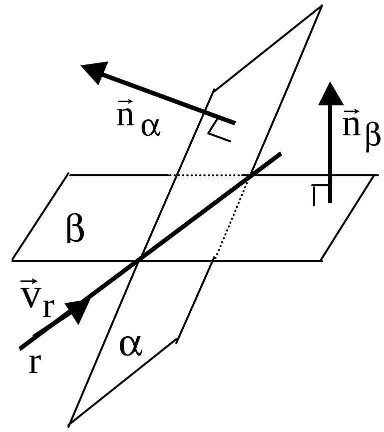
$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1 = 0 \\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 + d_2 = 0 \end{cases}.$$

Ou equivalentemente,

$$\begin{cases} ka_2x_1 + kb_2y_1 + kc_2z_1 + d_1 = 0 \\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 + d_2 = 0 \end{cases}$$

Daí, $d_1 = k(-a_2x_1 - b_2y_1 - c_2z_1)$. Logo, $d_1 = kd_2$.

Se os vetores normais dos planos α e β não são paralelos, então estes planos são concorrentes. Neste caso, eles se interceptam segundo uma reta r. Assim, um ponto $P(x,y,z)$ pertence à reta r se, somente se, suas coordenadas satisfazem ao sistema:

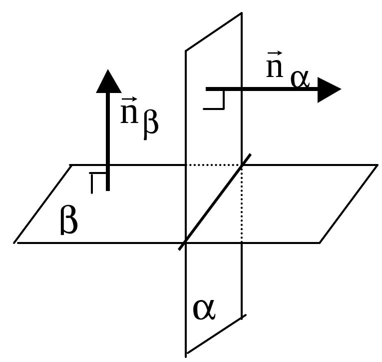


$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Este sistema é denominado **equação geral da reta r.**

Observemos que um vetor direção da reta r ,$\vec{v}_r$, possui representantes nos planos α e β. Daí, $\vec{v}_r$ é ortogonal a $\vec{n}_\alpha$ e ortogonal a $\vec{n}_\beta$. Podemos concluir então que $\vec{v}_r$ é paralelo ao vetor $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$.

Se os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são ortogonais dizemos que os planos α e β são perpendiculares. Assim, dois planos são perpendiculares se, somente se, $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$.



Exemplos

1. Estude a posição relativa dos planos:

a) $\alpha: 2x + y - z + 1 = 0$ e $\beta: 4x + 2y - 2z + 2 = 0$.

b) $\alpha:\ X = (1,0,1) + t(2,1,3) + h(0,0,1)$; $t,h \in IR$
e $\beta: 2x + y - z + 1 = 0$.

c) $\alpha:\ X = (1,0,1) + t(2,1,3) + h(0,0,1)$; $t,h \in IR$

e $\beta: \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 2t;\quad t,h \in IR \\ z = 2 + 5t - h \end{cases}$

Solução :

a) Observemos que $\vec{n}_\alpha = 2\,\vec{n}_\beta$, assim, os planos α e β são paralelos. Além disso, temos que $d_1 = 2d_2$. Logo, podemos concluir que α e β são coincidentes.

b) Consideremos os vetores $\vec{n}_\alpha = (2,1,3)\times(0,0,1) = (1,-2,0)$ $\vec{n}_\beta = (2,1,-1)$. Como estes vetores não são paralelos, temos que os planos α e β são concorrentes. Se r é a reta interseção de α e β, então a equação geral de r pode ser dada pelo sistema:

$$r : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases} .$$

Observemos ainda que $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$, assim α e β são perpendiculares.

c) Consideremos os vetores $\vec{n}_\alpha = (1,-2,0)$ e $\vec{n}_\beta = (-2,4,0)$. Observemos que $\vec{n}_\alpha = -2\,\vec{n}_\beta$, daí, os planos α e β são paralelos. No entanto, $P = (1,0,1)$ pertence ao plano α e não pertence ao plano β. Consequentemente, α e β são estritamente paralelos.

2. Determine uma equação do plano β paralelo a $\alpha : 2x - 6y + 4z - 1 = 0$ e que passa pelo ponto $P = (1,0,-2)$.

Solução :

Como o plano β é paralelo ao plano α, temos que $\vec{n}_\beta = k\,\vec{n}_\alpha$, $k \neq 0$. Podemos então considerar $\vec{n}_\beta = (-2,-6,4)$. Assim, podemos escrever: $\beta : 2x - 6y + 4z + d = 0$. Para determinarmos o valor de d basta utilizarmos o fato de que o ponto P pertence a β e por isso, satisfaz a sua equação. Daí, $2.1 - 6.0 + 4.(-2) + d = 0$, ou seja, d = 6. Logo, uma equação geral de β é $2x - 6y + 4z + 6 = 0$.

3. Dados os planos $\alpha : 2x + 4y - z + 1 = 0$ e $\beta : -x + 2y + z + 2 = 0$ determine uma equação vetorial da reta r interseção dos planos α e β.

Solução :

É fácil obtermos uma equação vetorial de uma reta se conhecemos dois de seus pontos. Ora, uma equação geral da reta r pode ser dada pelo sistema:

$$r:\begin{cases} 2x+4y-z+1=0 \\ -x+2y+z+2=0 \end{cases} \qquad ①$$

Assim, basta conseguirmos dois pontos cujas coordenadas satisfaçam a este sistema. Como este sistema é possível e indeterminado, podemos conseguir uma solução considerando $y=0$. Então,

$$\begin{cases} 2x-z+1=0 \\ -x+z+2=0 \end{cases}$$

Daí, $x=-3$, $z=-5$ e $P(-3,0,-5)$ pertence à reta r. De modo análogo, se considerarmos $x=0$ no sistema ①, obteremos $y=-\frac{1}{2}$, $z=-1$ e $Q=(0,-\frac{1}{2},-1)$ pertence à reta r. Daí, o vetor $\vec{v}_r=\overrightarrow{PQ}=(3,-\frac{1}{2},4)$ é um vetor direção da reta r e uma equação vetorial desta reta pode ser dada pela equação:

$$r:(x,y,z)=(-3,0,-5)+h\,(3,-\frac{1}{2},4);\, h\in R\,.$$

Uma outra maneira de determinarmos um vetor direção da reta r é obtida quando utilizamos o fato de que este vetor é paralelo ao vetor $\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta$. Assim, podemos considerar $\vec{v}_r=(2,4,-1)\times(-1,2,1)=(6,-1,8)$ e $r:(x,y,z)=(-3,0,-5)+h\,(6,-1,8);\, h\in IR$ é uma equação outra vetorial de r.

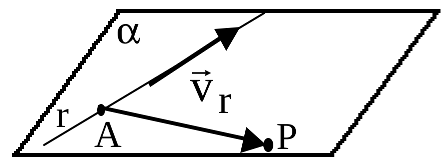
4. Dada a reta $r:(x,y,z)=(1,-2,0)+h\,(2,4,1);\, h\in IR$, determine uma equação geral da mesma.

Solução :

Devemos determinar as equações gerais de dois planos distintos α e β que contém a reta r.

Observemos que se um ponto não pertence a uma reta, o plano determinado por este ponto e esta reta, naturalmente, contém a reta.

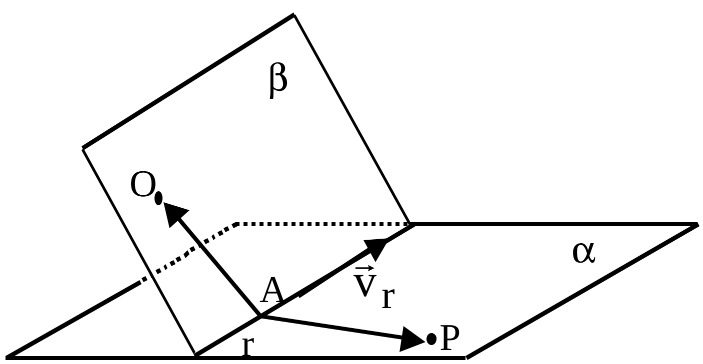
Assim, seja α o plano determinado pela reta r e pelo ponto $P(0,0,-1)$. O vetor normal de α pode ser dado por $\vec{n}_\alpha = \vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}$, onde A é um ponto de r.



Então, considerando $A(1,-2,0)$ temos que $\vec{n}_\alpha = (-6,1,8)$ e $\alpha: -6x + y + 8z + d = 0$.
Para determinarmos o valor de d, substituimos na equação anterior as cooordenadas de um ponto qualquer de α. Por exemplo, substituindo as coordenadas do ponto P, obtemos : $-6.0 + 0 + 8.(-1) + d = 0$. Daí, $d = 8$ e $\alpha: -6x + y + 8z + 8 = 0$.

A equação geral do plano β é obtida de modo análogo ao utilizado para obtenção da equação do plano α. Chamamos porém a atenção especial para a escolha do ponto: **agora ele deve ser escolhido fora do plano α.**

Considerando o plano β determinado pela reta r e pelo ponto O(0,0,0) temos que:



$\vec{n}_\beta = \vec{v}_r \times \overrightarrow{AO} = (-2,-1,8)$

e $\beta: -2x - y + 8z + d = 0$.

Como o plano β passa pela origem do sistema de coordenadas temos que $d = 0$.

Logo, $\beta: -2x - y + 8z = 0$, portanto uma equação geral da reta r é

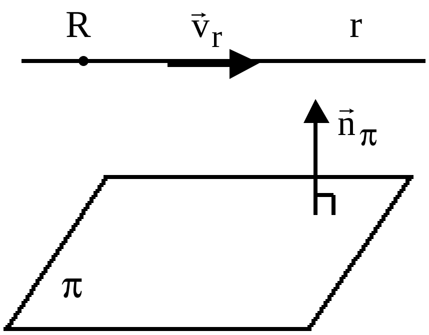
$$r: \begin{cases} -6x + y + 8z + 8 = 0 \\ -2x - y + 8z = 0 \end{cases}$$

CAPÍTULO IV - POSIÇÕES RELATIVAS DE UMA RETA E UM PLANO E DE DUAS RETAS

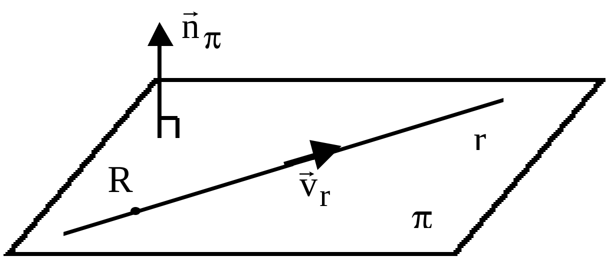
4.1 Posições relativas de uma reta e um plano

As posições de uma reta $r : X = R + t\,\vec{v}_r,\ \ t \in IR$ e um plano π são:

a) r paralela a π
($r \,//\, \pi$)



$r \,//\, \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ e $R \notin \pi$

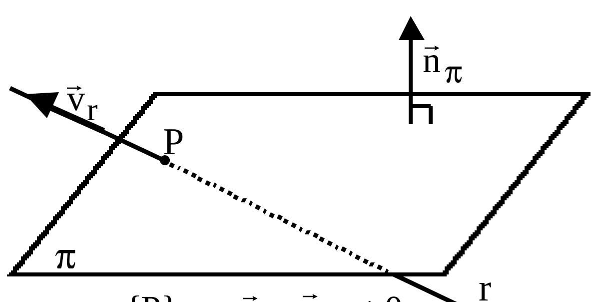


b) r contida em π ($r \subset \pi$)

$r \subset \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ e $R \in \pi$

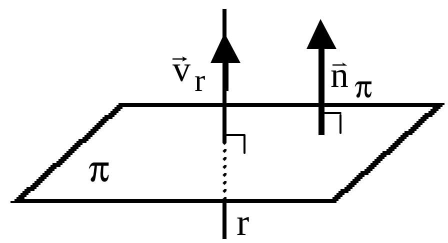
c) r e π concorrentes

($r \cap \pi = \{P\}$)



$r \cap \pi = \{P\} \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0$

Caso particular:



Exemplos:

1. Determine a interseção da reta r com o plano π, nos seguintes casos:

a) $r: \ X = (1,6,2) + t\,(1,1,1)\,;\, t \in IR$

$\pi : x - z - 3 = 0$

b) $r: \ x - 1 = y - 2 = 2\,(z - 1)$

$\pi : X = h(6,2,1) + t\,(1,2,1); \ t, h \in IR$

c) $r: \begin{cases} x = t \\ y = -3 + 3\,t\,;\, t \in IR \\ z = -t \end{cases}$

$\pi : x + y + 2z - 1 = 0$

Solução:

a) $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1,1,1)\cdot(1,0,-1) = 0$, logo, $r \cap \pi = r$ ou $r \cap \pi = \phi$.
Como R(1,6,2) é um ponto de r, verificamos que $R \notin \pi$. Logo $r \cap \pi = \phi$.

b) Sendo $\vec{v}_r = \left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$ e $\vec{n}_\pi = (6,2,1) \times (1,2,1) = (0,-5,10)$, temos que $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$. Logo, $r \cap \pi = r$ ou $r \cap \pi = \phi$. Como R(1,2,1) é um ponto de r, verificamos que $R \in \pi$. Logo $r \subset \pi$ e consequentemente $r \cap \pi = r$.

b) De $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1,3,-1)\cdot(1,1,2) = 2 \neq 0$ concluímos que r e π são concorrentes. Seja $r \cap \pi = \{P\} = \{(a,b,c)\}$. Temos então:

(1) $a + b + 2c - 1 = 0.$ (2) $\begin{cases} a = t \\ b = -3 + 3t, \\ c = -t \end{cases}$ para algum escalar t.

De (1) e (2) obtemos $t = 2$ e $P(2,3,-2)$.

2. Determine uma equação da reta r que passa pelo ponto $A(1,0,-2)$ e é paralela aos planos $\alpha: 2x - y + 2 = 0$ e $\beta: x + z - 3 = 0$.

Solução:

Como $r \,//\, \alpha$ e $r \,//\, \beta$, temos $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\alpha$ e $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\beta$. Sendo $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ LI, temos que $\vec{v}_r \,//\, \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$. Assim podemos considerar

$$\vec{v}_r = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = (1,01)\times(2,-1,0) = (1,2,-1).$$

Daí uma equação vetorial da reta r é:

$$r: X = (1,0,-2) + t\,(1,2,-1);\ t \in IR$$

4.2 Posições relativas de duas retas

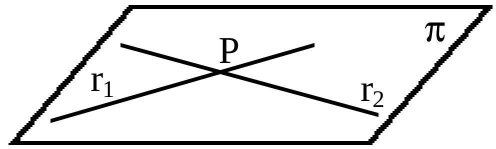
Se duas retas estão contidas no mesmo plano dizemos que são **coplanares**. Caso contrário são denominadas **reversas.**

As retas coplanares podem ser paralelas (distintas ou coincidentes) ou concorrentes.

Resumindo, duas retas r_1 e r_2 podem ser:

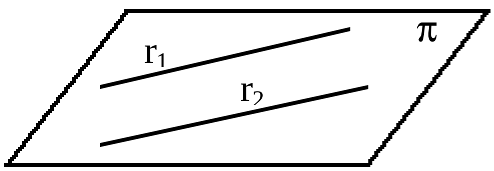
Coplanares

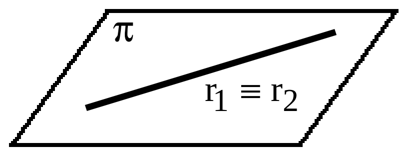
- Concorrentes : $r_1 \cap r_2 = \{P\}$



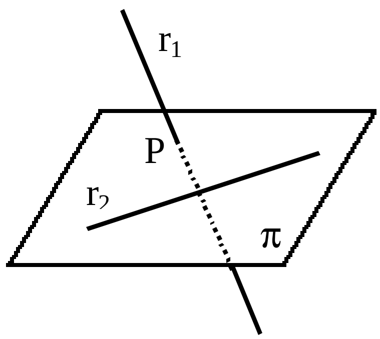
- Paralelas:

  - Distintas : $r_1 \cap r_2 = \phi$
  - Coincidentes : $r_1 \equiv r_2$





Reversas



Estabeleceremos a seguir condições para a identificação da posição relativa de duas retas.

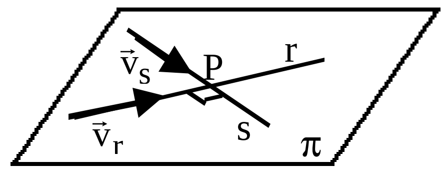
Considere as retas $r : X = R + h\,\vec{v}_r$ e $s : X = S + t\,\vec{v}_s$; $h, t \in IR$.

Se r e s são coplanares então os vetores $\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são coplanares e portanto $[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = 0$. Reciprocamente, se $[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = 0$ podemos ter:

i) $\vec{v}_r \,//\, \vec{v}_s$, nesse caso r e s são paralelas, logo coplanares.

ii) $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ LI, nesse caso $\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são LD. Como $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são linearmente independentes, então podemos escrever $\overrightarrow{RS}$ como combinação linear de $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$. Logo, existem escalares h_o e t_o tais que $S = R + h_o\vec{v}_r + t_o\vec{v}_s$. Assim, o plano $\beta : X = R + h\,\vec{v}_r + t\,\vec{v}_s;\ h, t \in IR$, contém as retas r e s, que portanto são coplanares. Observemos ainda que, neste caso as retas são concorrentes.

Um caso particular de retas concorrentes são as retas perpendiculares. Observemos que se duas retas r e s são perpendiculares então $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$.



Exemplos

1. Estude a posição relativa dos seguintes pares de retas:

a) $r : \begin{cases} 2x - y - z + 2 = 0 \\ x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$ e $s : X = (1,0,2) + h\,(1,-3,7);\ h \in IR$

b) $r : \begin{cases} x = h \\ y = 1 - h \\ z = 4 + 4h \end{cases}\ ; h \in IR$ e $s : \dfrac{1-x}{2} = \dfrac{y}{3} = z - 8$

c) $r : X = (-2,1,3) + t(-10,-2,-18)\ ; t \in IR$ e $s : \dfrac{x-3}{5} = y - 2 = \dfrac{z-12}{9}$

d) $r : X = (4,-3,1) + h(0,2,1);\ h \in IR$ e $s : \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 - 2t\ \ ; t \in IR \\ z = 3 - t \end{cases}$

Solução:

a) Como $\vec{v}_r \,//\, (2,-1,-1) \times (1,3,-1) = (4,1,7)$ e $\vec{v}_s \,//\, (1,-3,7)$ temos que as retas r e s são concorrentes ou reversas. Vamos então considerar R(0,0,2) e S(1,0,2) pontos de r e s, respectivamente. Assim,

$$[\overrightarrow{RS},\vec{v}_r,\vec{v}_s]=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 7\\ 1 & -3 & 7\end{vmatrix}=28\neq 0.$$

Portanto, as retas r e s são reversas.

c) Como $\vec{v}_r \,//\, (1,-1,4)$ e $\vec{v}_s \,//\, (-2,3,1)$ temos que as retas r e s são concorrentes ou reversas. Vamos então considerar R(0,1,4) e S(1,0,8) pontos de r e s, respectivamente.

Assim,

$[\overrightarrow{RS},\vec{v}_r,\vec{v}_s]=\begin{vmatrix}1 & -1 & 4\\ 1 & -1 & 4\\ -2 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$. Logo as retas r e s são concorrentes.

c) Como $\vec{v}_r \,//\, (-10,-2,-18)$ e $\vec{v}_s \,//\, (5,1,9)$ temos que as retas r e s são paralelas (distintas ou coincidentes). Além disso, o ponto $R(-2,1,3)$ pertence às retas r e s. Assim, podemos concluir que as retas r e s são coincidentes.

d) Como $\vec{v}_r \,//\, (0,2,1)$ e $\vec{v}_s \,//\, (0,-2,-1)$ temos que as retas r e s são paralelas (distintas ou coincidentes). Observemos que o ponto $R(4,-3,1)$ pertence à reta r, no entanto não pertence à reta s, pois o sistema

$$\begin{cases}4=4\\ -3=-1-2\,t_o\\ 1=3-t_o\end{cases}\text{ não tem solução.}$$

Assim, podemos concluir que as retas r e s são paralelas distintas.

2. Dê uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(-1,1,1)$ e é paralela à reta s: $\begin{cases}2x-y+4z+3=0\\ x+5y-z+6=0\end{cases}$.

Solução:

Sendo r e s retas paralelas podemos considerar $\vec{v}_r = \vec{v}_s$. Como $\vec{v}_s \,//\, (2,-1,4) \times (1,5,-1) = (-19,6,11)$ as equações simétricas de s são:

$$\frac{x+1}{-19} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{11}.$$

3. Mostre que as retas $r: x-2 = -y = z-1$ e $s: \begin{cases} x = 4+t \\ y = -2-t; \; t \in IR \\ z = 3 \end{cases}$

são concorrentes e determine o ponto de interseção.

Solução:

Sejam $\vec{v}_r = (1,-1,1), \vec{v}_s = (1,-1,0)$ e $R(2,0,1)$ e $S(4,-2,3)$ pontos de r e s,

respectivamente. Então $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ e assim concluímos

que r e s são coplanares. Como não são paralelas pois $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são vetores LI, temos que as retas são concorrentes. Seja $\{P_o\} = \{(x_o, y_o, z_o)\} = r \cap s$.

Então, $x_o - 2 = -y_o = z_o - 1$ e $\begin{cases} x_o = 4 + t_o \\ y_o = -2 - t_o \\ z_o = 3 \end{cases}$.

Daí, $t_o = 0$ e $P_o = (4,-2,3)$.

4. Determine uma equação da reta r que passa pelo ponto P (1,2,3), é concorrente com a reta $s: X = (-1,3,5) + h\,(2,5,1);\; h \in IR$, e tem vetor direção $\vec{v}_r$ ortogonal ao vetor $\vec{u} = (0,1,-4)$.

Solução:

Seja $\{P_o\} = r \cap s$. Então existe um real h_o, tal que $P_o(-1+2h_o, 3+5h_o, 5+h_o)$. Consideremos $\vec{v}_r = \overrightarrow{PP_o}$. Como $\vec{v}_r$ é ortogonal a $\vec{u}$, temos que $(-2+2h_o, 1+5h_o, 2+h_o)\cdot(0,1,-4)=0$. Logo, $h_o = 7$. Assim,

$$P_o = (13,18,12) \quad \text{e} \quad r: X = (1,2,3) + t\,(2,5,1);\ \ t \in IR.$$

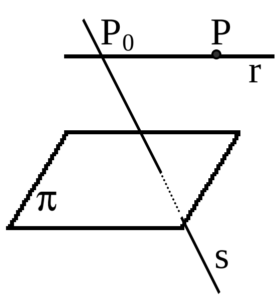
5. Determine uma condição necessária e suficiente para que uma reta r seja paralela ao eixo OX.

Solução:

O eixo OX tem vetor direção $\vec{i} = (1,0,0)$. Então, uma reta r é paralela ao eixo OX se, e somente se, $\vec{v}_r$ é paralelo ao vetor $\vec{i} = (1,0,0)$.

6. Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $P = (1,0,2)$, é concorrente com a reta $s: X = (1,0,1) + t\,(2,1,1); t \in IR$ e é paralela ao plano $\pi: 2x - 3y + 4z - 6 = 0$.

Solução:



Seja $\{P_o\} = r \cap s$ então, existe $t \in IR$ tal que $P_o = (1+2t, t, 1+t)$ e $\overrightarrow{PP_o} = (2t, t, t-1)$.

Como $r \,//\, \pi$ temos $(2t, t, t-1)\cdot(2,-3,4) = 0$. Assim, $t = \dfrac{4}{5}$.

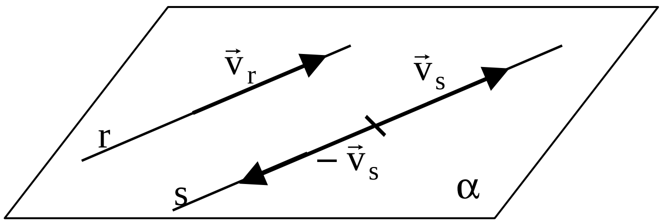
Considerando $\vec{v}_r = (8,4,-1)$, uma equação vetorial de r é:

$$r: X = (1,0,2) + t\,(8,4,-1); t \in IR.$$

CAPÍTULO V - ÂNGULOS

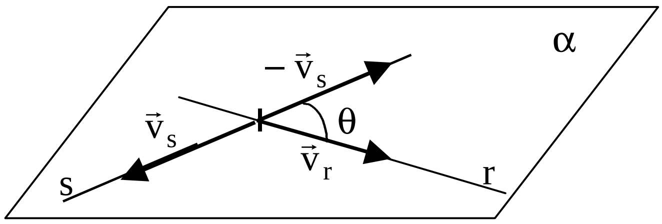
5.1 Ângulo entre duas retas

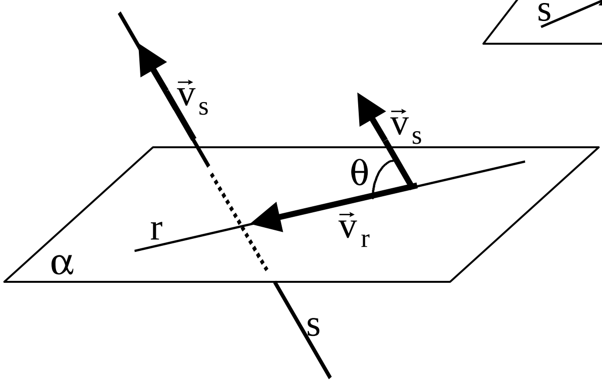
O ângulo entre duas retas r e s, indicado por (r,s), é definido como o menor dos ângulos $(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$ e $(\vec{v}_r, -\vec{v}_s)$.



Se r e s são retas paralelas então $(r, s) = 0$.

Na figura ao lado, o ângulo $(r, s) = (\vec{v}_r, -\vec{v}_s) = \theta$.





Na figura ao lado, as retas r e s são reversas e $(r, s) = (\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \theta$.

Assim, $0 \le (r, s) \le \dfrac{\pi}{2}$ e $\cos(r, s) = |\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)| = |\cos(\vec{v}_r, -\vec{v}_s)|$.

Logo,

$$\mathbf{(r, s) = arc\cos \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r|\,|\vec{v}_s|}}$$

Quando $(r, s) = \dfrac{\pi}{2}$, dizemos que r e s são ortogonais e escrevemos $r \perp s$.

Se r e s são ortogonais e concorrentes dizemos que as retas são perpendiculares. É claro que $\mathbf{r \perp s \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0}$.

Exemplos

1. Determine os ângulos formados pelas retas r e s, nos seguintes casos:

a) $r: X = \lambda(1,-1,1)\ ;\lambda \in IR$ e $s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}\ ;t \in IR$

b) $r: \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ e $s: x + 1 = \dfrac{y-2}{2} = z$.

c) $r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 \end{cases}\ ;t \in IR$ e $s: \dfrac{x-3}{2} = y + 1 = \dfrac{z+1}{3}$

Solução:

a) Como $\vec{v}_r = (1,-1,1)$ e $\vec{v}_s = (-1,1,-1)$, as retas r e s são paralelas. Assim, $(r,s) = 0$.

b) Temos $\vec{v}_r = (1,2,-1) \times (1,-1,1) = (1,-2,-3)$ e $\vec{v}_s = (1,2,1)$. Daí,

$$(r,s) = \operatorname{arc\,cos} \frac{|1-4-3|}{|\sqrt{14}||\sqrt{6}|} = \operatorname{arc\,cos} \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

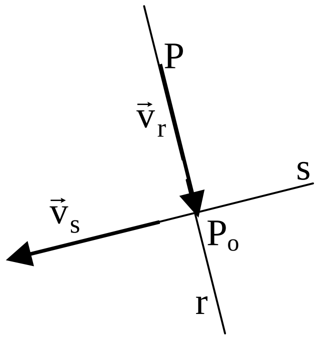
c) Como $\vec{v}_r = (-2,2,0)$ e $\vec{v}_s = (2,1,3)$, temos:

$$(r,s) = \operatorname{arc\,cos} \frac{|-4+2+0|}{|\sqrt{8}||\sqrt{14}|} = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

2. Determine uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(1,1,-2)$ e é perpendicular à reta $s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}\ ;t \in IR$.

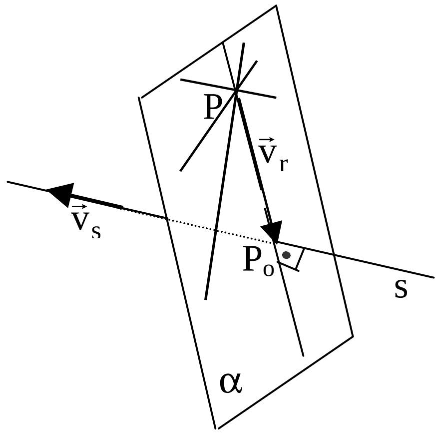
Solução:

Como r e s são perpendiculares, temos que estas retas são concorrentes e ortogonais. Assim, se P_o é o ponto de concorrência de r e s, existe t_o real, tal que $P_o = (1 + t_o, 2t_o, 2 - t_o)$. Podemos então considerar $\vec{v}_r = \overrightarrow{PP_o} = (t_o, 2t_o - 1, 4 - t_o)$. Pela condição de ortogonalidade, temos: $\vec{v}_s \cdot \overrightarrow{PP_o} = 0$. Assim, $t_o + 2(2t_o - 1) - (4 - t_o) = 0$, daí, $t_o = 1$. Portanto uma equação da reta r é $r : X = (1,1,-2) + \lambda(1,1,3)\ ; \lambda \in IR$.



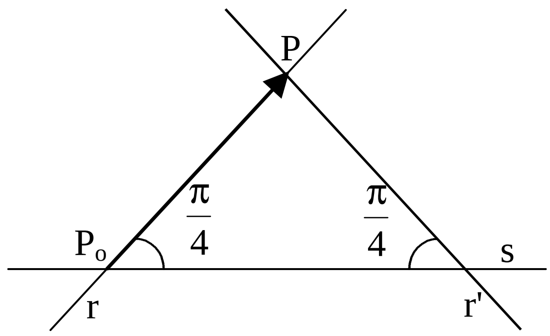
3. Substituindo, no exemplo anterior, a condição de perpendicularidade por ortogonalidade, o problema tem solução única?

Solução:
Neste caso, a direção de r poderia ser dada por qualquer vetor ortogonal a $\vec{v}_s$, sem restrições e, portanto, existe uma infinidade de soluções: *toda reta que passa por P e está contida no plano* $\alpha : \overrightarrow{PX} \cdot \vec{v}_s = 0$.



4. Determine uma equação da reta r que passa por $P(1,0,0)$ é concorrente com $s : X = t(1,1,0)\ ; t \in IR$ e $(r, s) = \frac{\pi}{4}$.

Solução:
Observemos inicialmente que o ponto P não pertence à reta s. Assim, se P_o é o ponto de concorrência de r e s, existe t_o real, tal que $P_o = (t_o, t_o, 0)$ e $\vec{v}_r = \overrightarrow{PP_o} = (t_o - 1, t_o, 0)$.



Então,

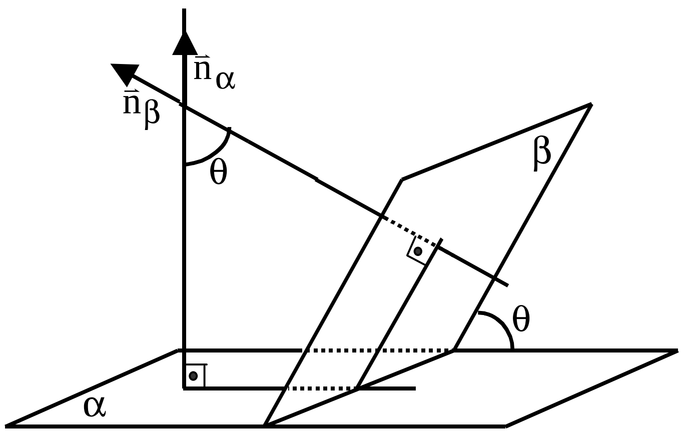
$$\cos(r,s) = \cos\frac{|(1,1,0)\cdot(t_o - 1, t_o, 0)|}{\sqrt{2}\sqrt{(t_o - 1)^2 + t_o{}^2 + 0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Daí, $|t_o - 1 + t_o| = \sqrt{(t_o - 1)^2 + t_o{}^2}$. Logo, $t_o = 0$ ou $t_o = 1$.

Assim, este problema admite duas soluções:

- $t_o = 0$; $r: X = (1,0,0) + t(-1,0,0)$; $t \in IR$
- $t_o = 1$; $r': X = (1,0,0) + h(0,1,0)$; $h \in IR$.

5.2 Ângulo entre dois planos



O ângulo entre dois planos α e β, indicado por (α, β), é definido como o menor dos ângulos $(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)$ e $(\vec{n}_\alpha, -\vec{n}_\beta)$.

Assim, $0 \leq (\alpha,\beta) \leq \frac{\pi}{2}$ e

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{arc\,cos}\frac{|\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{b}}|}{|\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{b}}|}$$

Quando $(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}$, dizemos que α e β são ortogonais e escrevemos $\alpha \perp \beta$. É claro que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ **Û** $\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$.

Chamamos reta normal a um plano α a toda reta que tem a direção de $\vec{n}_\alpha$. Assim, podemos dizer que o ângulo entre dois planos é o ângulo formado por duas retas normais a esses planos.

Exemplos

1. Determine o ângulo formado pelos planos α e β, nos seguintes casos:

a) $\alpha: 2x + y - z + 1 = 0$ e $\beta: x + y + z + 2 = 0$.

b) $\alpha: x + y - z + 5 = 0$ e $\beta: X = t(1,0,1) + h(1,-1,0)$; $t, h \in IR$.

c) $\alpha: \begin{cases} x = t + h \\ y = t \\ z = 1 + h \end{cases}$; $t, h \in IR$ e $\beta: 2x + y + z - 1 = 0$

Solução:

a) Das equações de α e β temos $\vec{n}_\alpha = (2,1,-1)$ e $\vec{n}_\beta = (1,1,1)$. Assim,

$$\cos(\alpha,\beta) = \frac{|(2,1,-1)\cdot(1,1,1)|}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Logo, $(\alpha,\beta) = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

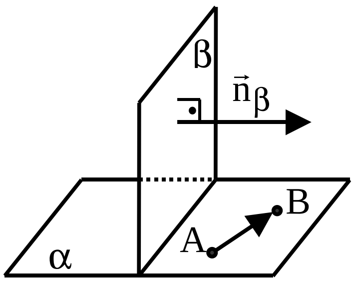
b) $\vec{n}_\alpha = (1,1,-1)$ e $\vec{n}_\beta = (1,0,1)\times(1,-1,0) = (1,1,-1)$.

Daí, $\cos(\alpha,\beta) = \dfrac{|(1,1,-1)\cdot(1,1,-1)|}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = 1$. Logo, $(\alpha,\beta) = 0$.

c) $\vec{n}_\alpha = (1,1,0)\times(1,0,1) = (1,-1,-1)$ e $\vec{n}_\beta = (2,1,1)$.

Assim, $\cos(\alpha,\beta) = \dfrac{|(1,-1,-1)\cdot(2,1,1)|}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = 0$. Logo, $(\alpha,\beta) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Determine uma equação do plano α ortogonal ao plano $\beta: 2x - y + z + 1 = 0$ e que passa pelos pontos $A = (1,0,2)$ e $B = (2,1,3)$.

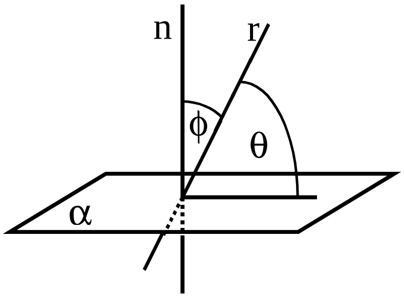


Solução:

Os vetores $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ e $\vec{n}_\beta = (2,-1,1)$ são L.I. e possuem representantes em α. Assim, uma equação vetorial do plano α pode ser dado por:

$$\alpha: X = (1,0,2) + t(1,1,1) + h(2,-1,1) ; t, h \in IR.$$

5.3 Ângulo entre reta e plano



O ângulo entre uma reta r e um plano α, indicado por (r,α), é definido como o complemento do ângulo formado pela reta r e por uma reta n normal ao plano α.
Na figura, temos $\phi = (r,n)$ e $\theta = (r,\alpha)$.
Assim, $0 \le (r,\alpha) \le \frac{\pi}{2}$ e pode ser calculado como:

$$\mathbf{(r,a) = \frac{p}{2} - (r,n) = \frac{p}{2} - arc\cos \frac{|\vec{v}_r \times \vec{n}_a|}{|\vec{v}_r||\vec{n}_a|}}$$

ou,

$$\mathbf{(r,a) = arc\,sen \frac{|\vec{v}_r \times \vec{n}_a|}{|\vec{v}_r||\vec{n}_a|}}.$$

Quando $(r,\alpha) = \frac{\pi}{2}$, dizemos que a reta r e o plano α são perpendiculares e escrevemos $r \perp \alpha$. É claro que $\mathbf{r \wedge a}$ **Û** $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}} // \vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{a}}$.

Exemplo

1. Determine o ângulo entre r e α, nos seguintes casos:

a) $r: X = (1,0,1) + t(1,0,2)\ ;\ t \in IR$
$\alpha: X = t(1,0,1) + h(1,2,-3)\ ;\ t, h \in IR.$

b) $r: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$ e $\alpha: x - 2y - 2z + 1 = 0$

Solução:
a) Como $\vec{v}_r = (1,0,2)$ e $\vec{n}_\alpha = (1,0,1) \times (1,2,-3) = (-2,4,2)$, temos:

$$\text{sen}\,(r,\alpha) = \frac{|(1,0,2)\cdot(-1,2,1)|}{\sqrt{5}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{30}}\ .$$

Logo, $(r,\alpha) = \text{arc}\,\text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{30}}$.

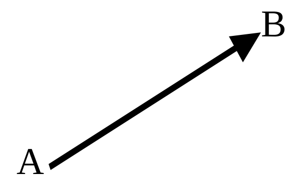
b) Temos $\vec{v}_r = (1,-1,0) \times (2,2,-1) = (1,1,4)$ e $\vec{n}_\alpha = (1,-2,-2)$, assim,

$$\operatorname{sen}(r,\alpha) = \frac{|(1,1,4)\cdot(1,-2,-2)|}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Logo, $(r,\alpha) = \dfrac{\pi}{4}$.

CAPÍTULO VI - DISTÂNCIA

6.1 Distância entre dois pontos



A distância entre um ponto A e um ponto B é indicada por d(A,B) e definida por $|\overrightarrow{AB}|$.

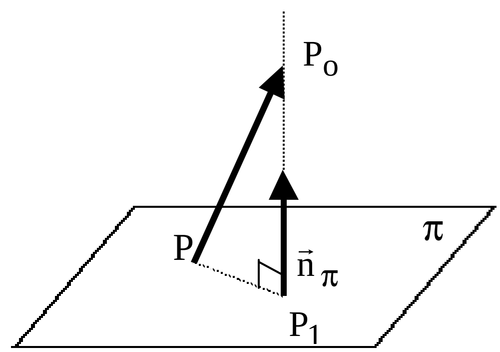
Considerando $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ temos que:

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)| \ .$$

Daí, $$\mathbf{d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}}$$

6.2 Distância entre um ponto e um plano

A distância entre um ponto P_o e um plano π é indicada por $d(P_o, \pi)$ e definida como a menor entre as distâncias de P_o a pontos de π.



Assim, se P é um ponto qualquer de π, então a distância entre P_o e π é o módulo da projeção do vetor $\overrightarrow{PP_o}$, na direção de $\vec{n}_\pi$.

Considerando $\pi: ax + by + cz + d = 0$ $P_o(x_o, y_o, x_o)$ e P(x, y, z) então:

$$d(P_o, \pi) = |\overrightarrow{PP_o} \cdot \overset{\circ}{\vec{n}}_\pi| = \frac{|a(x_o - x) + b(y_o - y) + c(z_o - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Logo, $$\mathbf{d(P_o, p)| = \frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}.$$

Exemplos:

Determine a distância entre o ponto P_o e o plano π nos seguintes casos:
a) $P_o(1,1,2)$ e $\pi: 2x - y + 2z + 4 = 0$

b) $P_o(2,2,4)$ e $\pi: X = (1,0,1) + h(1,1,1) + t(1,2,3)$; $h, t \in IR$.

Solução:

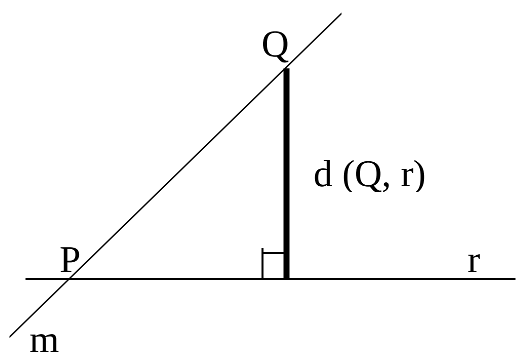
a) $d(P_o, \pi) = \dfrac{|2.1 - 1.1 + 2.2 + 4|}{\sqrt{9}} = 3$

b) Consideremos $P(1,0,1)$ e $\vec{n}_\pi = (1,1,1) \times (1,2,3) = (1,-2,1)$.
Assim,

$$d(P_o, \pi) = |\overrightarrow{PP_o} \cdot \overset{\circ}{\vec{n}}_\pi| = \frac{|1.1 + (-2).2 + 1.3|}{\sqrt{6}} = 0.$$

6.3 Distância entre um ponto e uma reta

A distância entre um ponto Q e uma reta r é indicada por d(Q, r) e definida como a menor entre as distâncias de Q a pontos de r.

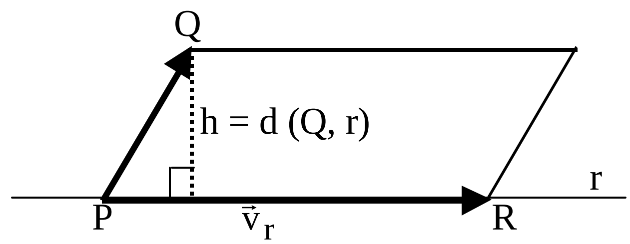


Assim, se $P \in r$ e m é a reta definida pelos pontos P e Q, temos que :

$$d(Q,r) = |\overrightarrow{PQ}|.\,\text{sen}\,(r,m) = |\overrightarrow{PQ}| \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}_r|}{|\overrightarrow{PQ}||\vec{v}_r|}.$$

Logo, $\mathbf{d(Q,r) = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}}$.

Utilizando a interpretação geométrica do produto vetorial, podemos observar que d(Q,r) é a altura do paralelogramo, cujos lados são representantes dos vetores $\vec{v}_r$ e $\overrightarrow{PQ}$, em relação à base PR, sendo $R = P + \vec{v}_r$.



Exemplos:

Determine d(Q,r) nos seguintes casos:

a) Q(1,1,0) e $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$; $t \in IR$

b) Q(1,2,3) e $r: \begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$

Solução:

a) Sejam P(2,0,1) e $\vec{v}_r = (1,2,-1)$.
Então,

$$d(Q,r) = \frac{|(-1,1,-1) \times (1,2,-1)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

b) Sejam $P(0,-7,-4)$ e $\vec{v}_r = (-1,5,3)$.
Então,

$$d(Q,r) = \frac{|(1,9,7) \times (-1,5,3)|}{\sqrt{35}} = \frac{6\sqrt{14}}{7}.$$

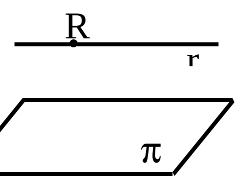
6.4 Distância entre uma reta e um plano

A distância entre a reta r e o plano π é indicada por d(r, π) e definida como a menor distância entre os pontos de r a π.

Assim:

a) Se r e π são concorrentes ou se r está contida em π então $d(r,\pi) = 0$.

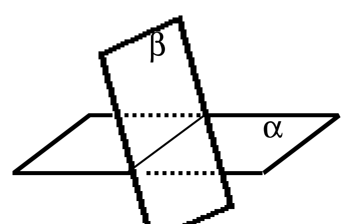
b) Se r é paralela a π então d(r, π) = d(R, π) ; R $\in$ r.



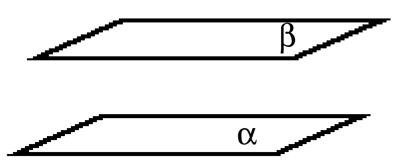
6.5 Distância entre dois planos

A distância entre os planos α e β é indicada por $d(\alpha, \beta)$ e definida como a menor distância entre os pontos de α a β. Assim,

a) Se α e β são concorrentes então $d(\alpha, \beta) = 0$.



b) Se α e β são paralelos então $d(\alpha, \beta) = d(P, \beta)$; P $\in$ α.



Exemplos:

1. Calcule $d(r,\pi)$ nos seguintes casos:

a) $r:\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ e $\pi: 3x - y + 2z - 2 = 0$

b) $r: X = (1,2,1) + h(-1,1,0);\ h \in IR$ e $\pi: 3x + 3y + z - 2 = 0$

Solução:

a) Sabemos que $\vec{v}_r \,//\, (2,-1,1)\times(1,1,-1) = (0,3,3)$. Consideremos $\vec{v}_r = (0,1,1)$ e $\vec{n}_\pi = (3,-1,2)$. Como $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 1$, temos que r e π são concorrentes. Portanto, $d(r, \pi)=0$.

b) Como $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ e $R(1,2,1) \notin \pi$, concluímos que r é paralela a π.

Assim, $d(r,\pi) = d(R,\pi) = \dfrac{|3.1 + 3.2 + 1.1 - 2|}{\sqrt{19}} = \dfrac{8\sqrt{19}}{19}$, sendo $R(1,2,1)$ um ponto de r.

2. Calcule $d(\alpha,\beta)$ nos seguintes casos:

a) $\alpha: X = h(1,-1,0) + t(0,1,1);\ h, t \in IR$ e $\beta: 3x + 3y - z + 3 = 0$

b) $\alpha: 2x + 2y - 2z + 1 = 0$ e $\beta:\begin{cases} x = h \\ y = -h + t \\ z = t \end{cases};\ h, t \in IR$

Solução:

a) Sejam $\vec{n}_\alpha = (1,-1,0)\times(0,1,1) = (-1,-1,1)$ e $\vec{n}_\beta = (3,3,-1)$.
Como $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são LI temos que α e β são concorrentes. Assim, $d(\alpha,\beta) = 0$.

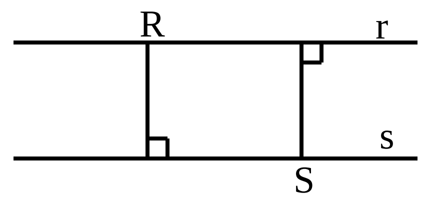
b) Sejam $\vec{n}_\alpha = (2,2,-2)$ e $\vec{n}_\beta = (1,-1,0)\times(0,1,1) = (-1,-1,1)$. Como estes vetores são LD, concluímos que α e β são paralelos. Assim, $d(\alpha,\beta) = d(P,\alpha) = \dfrac{|2.0 + 2.0 - 2.0 - 1|}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, sendo $P(0,0,0)$ um ponto de β.

6.6 Distância entre duas retas

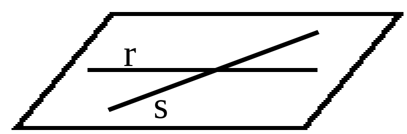
A distância entre as retas r e s é indicada por d(r,s) e definida como a menor distância entre os pontos de r e s.

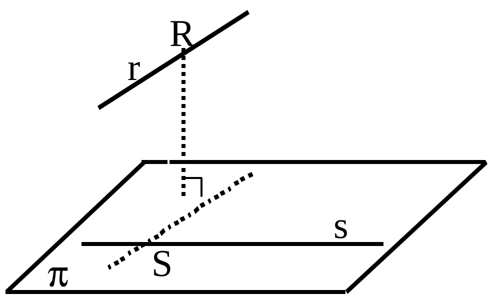
Consideremos as retas $r: X = R + t\vec{v}_r;\ t \in IR$ e $s: X = S + h\vec{v}_s;\ h \in IR$. Assim,

1) Se r é paralela a s então
$d(r,s) = d(R,s) = d(S,r)$.



2) Se r e s são concorrentes então d(r,s)= 0.



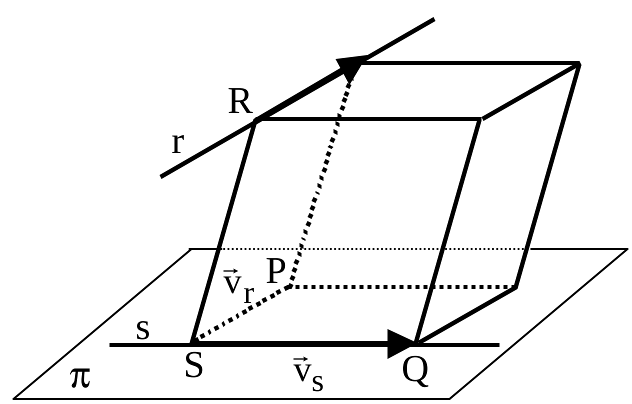


3) Se r e s são reversas então $d(r,s) = d(r,\pi) = d(R,\pi)$, sendo π um plano que contém s e é paralelo a r. Assim,

$$d(r,s) = d(R,\pi) = |\text{proj}_{\vec{v}_r \times \vec{v}_s} \overrightarrow{RS}|$$

Ou seja, $$\mathbf{d(r,s)} = \frac{|[\overrightarrow{\mathbf{RS}}, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{s}}]|}{|\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{s}}|}$$

Da interpretação geométrica de produto misto e produto vetorial, concluímos que d(r,s) é a altura do paralelepípedo cujas arestas são representantes dos vetores $\overrightarrow{SR}$, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ em relação à base SPQ, sendo $P = S + \vec{v}_r$ e $Q = S + \vec{v}_s$.



Exemplos:

1. Calcule d(r,s) nos seguintes casos:

a) $r: X = (1,0,2) + h(1,1,1);\ h \in IR$ e $s: x - 1 = y + 2 = z - 3$

b) $r: X = (3,-1,1) + t(2,0,1);\ t \in IR$ e $s: \begin{cases} x = 6 - h \\ y = -2 + h\,; \quad h \in IR \\ z = 1 + h \end{cases}$

c) $r: X = (1,1,1) + h(-1,2,1);\ h \in IR$ e $s: X = (1,1,3) + t(2,1,3);\ t \in IR.$

Solução:

a) As retas r e s são paralelas pois $\vec{v}_r = (1,1,1) = \vec{v}_s$.
Assim, d(r,s) = d(R,s) = d(S,r).
Consideremos $R(1,0,2)$ e $S(1,-2,3)$ pontos de r e s, respectivamente.
Então:

$$d(r,s) = \frac{|\,(0,-2,1) \times (1,1,1)\,|}{|\,(1,1,1)\,|} = \frac{\sqrt{42}}{3}.$$

b) Temos $\vec{v}_r = (2,0,1)$ e $\vec{v}_s = (-1,1,1)$. Assim, as retas não são paralelas.
Sejam $R(3,-1,1)$ e $S(6,-2,1)$ pontos de r e s, respectivamente. Então:

$$\left[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, r e s são concorrentes e d(r,s) = 0.

c) Sejam $\vec{v}_r = (-1,2,1)$ e $\vec{v}_s = (2,1,3)$. Assim, as retas não são paralelas.
Consideremos $R(1,1,1)$ e $S(1,1,3)$ pontos de r e s, respectivamente.
Então:

$$\left[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

Daí, r e s são reversas .

Logo,

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

2) Sejam r: X = (1,2,0) + t(1,1,1); t $\in$ R e s: $\begin{cases} x = ah \\ y = 1 + h \; ; h \in R. \\ z = 2 - h \end{cases}$

Determine a, de modo que :

a) d(r,s)= 0

b) r e s sejam reversas.

Solução:

a) d(r,s) = 0 $\Rightarrow$ r e s são concorrentes ou coincidentes. Sejam $\vec{v}_r = (1,1,1)$, $\vec{v}_s = (a,1,-1)$, $R(1,2,0)$ e $S(0,1,2)$.

Como não existe a real tal que $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ sejam LD, podemos afirmar que d(r,s) = 0 se, e somente se, $\left[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right] = 0.$

Mas,

$$\left[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 3a.$$

Logo, r e s são concorrentes se, e somente se, a = 1.

b) Da solução do item a), temos que r e s são reversas se, e somente se, $a \in R - \{1\}$.

Exercícios resolvidos

1. Um paralelepípedo ABCDEFGH de base ABCD tem volume igual a 9 unidades. Sabendo-se que $A(1,1,1), B(2,1,2), C(1,2,2)$, o vértice E pertence à reta r de equação $r: x = -y = 2 - z$ e $(\overrightarrow{AE}, \vec{i})$ é agudo. Determine as coordenadas do vértice E.

Solução:

Como E pertence à reta r, temos $E(t, -t, 2-t)$ e $\overrightarrow{AE} = (t-1, -1-t, 1-t)$.
Assim,

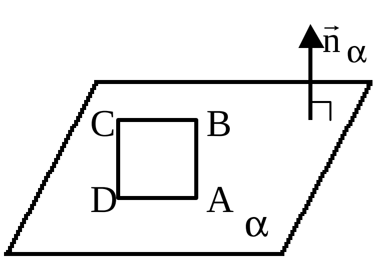
$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}]| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ t-1 & -t-1 & 1-t \end{vmatrix}\right| = |3-t| = 9.$$

Logo $t = -6$ ou $t = 12$.

Se $t = -6$, então $\overrightarrow{AE} = (-7, 5, 7)$ e $\overrightarrow{AE} \cdot \vec{i} = -7$. Logo $(\overrightarrow{AE}, \vec{i})$ é obtuso. Como este valor de t contradiz uma das hipóteses do nosso exercício, consideremos t = 12. Neste caso, $\overrightarrow{AE} = (11, -13, -11)$ e $\overrightarrow{AE} \cdot \vec{i} = 11$ assim, $(\overrightarrow{AE}, \vec{i})$ é agudo. Portanto $E = A + \overrightarrow{AE} = (12, -12, -10)$.

2. Um quadrado ABCD está sobre o plano $\alpha: x - y + 2z - 1 = 0$. Sabendo-se que $A(1,0,0)$ e $B(0,1,1)$ são vértices consecutivos. Determine as coordenadas dos outros dois vértices.

Solução:



De $A(1,0,0)$ e $B(0,1,1)$ temos $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1)$ e de $\alpha: x - y + 2z = 1$ temos $\vec{n}_\alpha = (1, -1, 2)$.

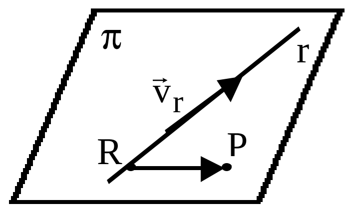
Como $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD} \perp \vec{n}_\alpha$ temos:

$$\overrightarrow{AD} \,//\, \overrightarrow{AB} \times \vec{n}_\alpha = (3, 3, 0).$$

Além disso, $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$. Considerando $\overrightarrow{AD}^{\circ} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ temos: $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$, $D = A + \overrightarrow{AD} = \left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$ e $C = B + \overrightarrow{AD} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}+2}{2}, 1\right)$.

Podemos observar que considerando $\overrightarrow{AD}^{\circ} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ encontraremos a outra solução do exercício.

3. Determine uma equação do plano π que passa pelo ponto $P(1,0,1)$ e contém a reta de equação $r: \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$.



Solução:

Sejam $R(-1,0,0)$ um ponto da reta r e o vetor $\vec{v}_r = (1,1,0) // (0,3,3) = (1,-1,1) \times (2,1,-1)$. Como o ponto $P(1,0,1)$ não pertence à reta r, temos $\overrightarrow{RP} = (2,0,1)$ e $\vec{v}_r$ são vetores LI com representantes em π. Assim, uma equação vetorial do plano π é:

$$\pi : (x, y, z) = (1,0,1) + t\,(2,0,1) + h\,(0,1,1)\,;\ t, h \in IR$$

4. Determine uma condição necessária e suficiente para que um plano $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ seja ortogonal ao plano XOZ.

Solução:

Observemos que os vetores $\vec{j} = (0,1,0)$ e (A,B,C) são normais aos planos XOZ e α, respectivamente. Assim, os planos α e XOZ são ortogonais se, somente se, $(A, B, C) \cdot (0,1,0) = 0$. Daí, B = 0.

Observação: De modo análogo, podemos mostrar que as condições necessárias e suficientes para que um plano $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ seja ortogonal ao plano XOY e ao plano YOZ são, respectivamente $C = 0$ e $A = 0$.

5. Determine uma equação geral de um plano que contém a reta

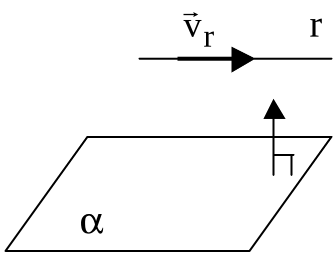
$$s:\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}=y-1=\dfrac{z+3}{3}\end{cases}$$ e é ortogonal ao plano YOZ.

Solução:

Observemos que o plano $\alpha: y-1=\dfrac{z+3}{3}$ contém a reta s, já que todos os pontos de s satisfazem à equação de α. Além disso, $\alpha: 3y-z-6=0$ é ortogonal a plano YOZ (porque?). Assim, α é o plano procurado.

6. Mostre que um plano $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ é paralelo ao eixo OY se, e somente se, é ortogonal ao plano XOZ.

Solução:



Sabemos que um plano α é paralelo a uma reta r se, e somente se, $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{v}_r = 0$. Assim, o plano α é paralelo ao eixo OY se, e somente se $0=(A,B,C)\cdot(0,1,0)=B$. Portanto a condição α paralelo ao eixo OY é equivalente a α ortogonal ao plano XOZ.

7. Dados os planos $\alpha: Ax+4y+4z+D=0$ e $\beta: 6x+8y+Cz-2=0$, determine as constantes A, C e D tais que:

a) $d(\alpha,\beta)=\sqrt{41}$

b) O plano α seja ortogonal ao plano β e contém o eixo OX.

Solução:

a) Como $d(\alpha,\beta)\neq 0$ temos que $\alpha\cap\beta=\phi$. Assim, os vetores $\vec{n}_\alpha=(A,4,4)$ e $\vec{n}_\beta=(6,8,C)$ são paralelos e portanto $A=3$ e $C=8$. Tomemos $P(1,-1,0)$ um ponto do plano β. Sabemos que:

$$d(\alpha,\beta)=d(P,\alpha)=\frac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+4\cdot 0+D|}{\sqrt{9+16+16}}=\sqrt{41}.$$

Assim, $|D-1|=41$, logo $D=42$ ou $D=-40$.

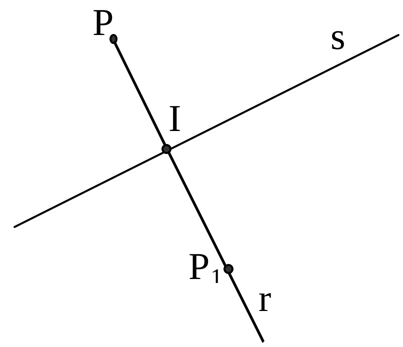
b) Como o plano α contém o eixo OX temos $A = 0$ e $D = 0$. Da ortogonalidade dos planos α e β temos:

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = (0,4,4) \cdot (6,8,C) = 32 + 4C = 0\,.$$

Logo $C = -8$.

8. Determine as coordenadas do ponto P_1, simétrico de $P(1,1,-2)$ em relação à reta $s: x + 1 = y - 1 = z$.

Solução:

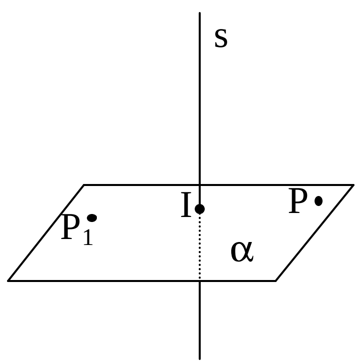


Sejam r a reta perpendicular à reta s que passa pelo ponto P e $\{I\} = r \cap s$. Então, $I = (t - 1, 1 + t, t)$ e podemos considerar $\vec{v}_r = \overrightarrow{PI} = (t - 2, t, t + 2)$. Como as retas r e s são ortogonais temos:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (t - 2, t, t + 2) \cdot (1,1,1) = 0$$

Logo, $t = 0$ e $\overrightarrow{PI} = (-2,0,2)$. Como $\overrightarrow{IP_1} = \overrightarrow{PI}$ temos $P_1 = I + \overrightarrow{IP_1}$. Assim $P_1 = (-1,1,0) + (-2,0,2) = (-3,1,2)$.

Observação:

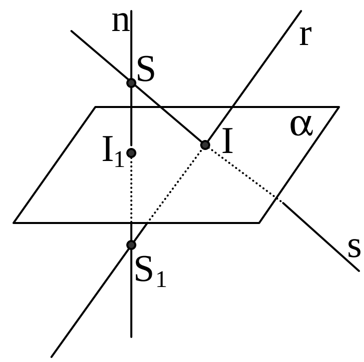


O ponto I também poderia ser determinado através da interseção da reta s com o plano α que passa pelo ponto P e é ortogonal à reta s.

Sendo α perpendicular a s temos: α: $x + y + z + D = 0$. Utilizando o fato de que $P \in \alpha$, podemos concluir que $D = 0$.

9. Determine uma equação da reta r, simétrica da reta $s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \qquad ; t \in IR \\ z = 2 \end{cases}$, em relação ao plano $\alpha: x - y + z + 1 = 0$.

Solução:



Observemos que se S e Q são pontos da reta s então S_1 e Q_1, simétricos de S e Q, respectivamente, em relação ao plano α são pontos da reta r.

De $\vec{v}_s \cdot \vec{n}_\alpha = (2,1,0)\cdot(1,-1,1) \neq 0$, temos que s e α são concorrentes. Seja $\{I\} = s \cap \alpha$. Então, $I = (1+2t, t, 2)$ e $1+2t-t+2+1=0$. Logo, $t=-4$ e $I(-7,-4,2)$. Assim, as equações paramétricas da reta n, normal a α e concorrente com a reta s em S(1,0,2) são :

$$n : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \quad ; t \in IR \\ z = 2+t \end{cases}.$$

Considerando $\{I_1\} = n \cap \alpha$, temos $I_1 = (1+t, -t, 2+t)$ e $1+t+t+2+t+1=0$. Logo, $t = -\dfrac{4}{3}$ e portanto $I_1 = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

Daí, $S_1 = I_1 + \overrightarrow{SI_1} = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}\right) + \left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\right) = \left(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{8}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$

Como I e S_1 são pontos distintos de r podemos considerar $\vec{v}_r = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{S_1 I}$.

Assim, uma equação vetorial de r é :

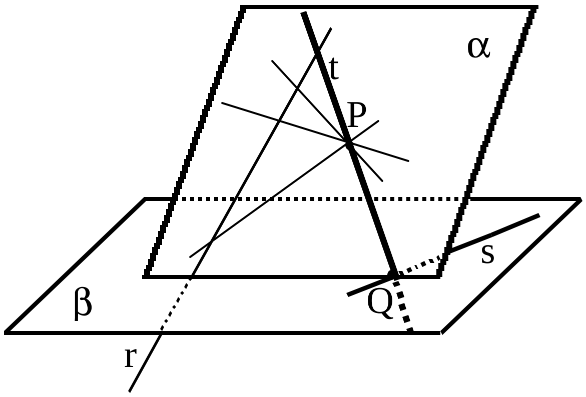
$$X = (-7,-4,2) + h(4,5,-2);\ h \in IR.$$

10. Determine, caso exista, uma reta t que passa pelo ponto $P(1,-2,-1)$ e é concorrentes com as retas r e s.

$$r : \begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2\lambda - 3;\ \lambda \in IR \\ z = \lambda \end{cases} \qquad e \qquad s : \begin{cases} x = h-2 \\ y = 1-h \quad ; h \in IR \\ z = h \end{cases}.$$

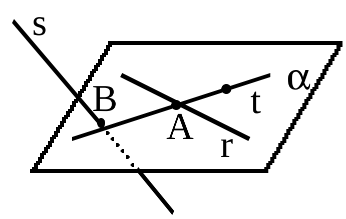
Solução 1:

Podemos verificar que r e s são retas reversas e que $P \notin r$. Assim, o plano α determinado por P e r, contém toda reta que passa por P e é concorrente com r. Logo, a reta t, caso exista, está contida em $\alpha : x - y + z - 2 = 0$.



De $\vec{v}_s \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$ concluímos que s e α são concorrentes, seja $\{Q\} = s \cap \alpha$. Como $Q \in s$ temos $Q(h-2, 1-h, h)$, por outro lado, Q também pertence a α daí, $h - 2 - (1-h) + h - 2 = 0$. Consequentemente, $h = \frac{5}{3}$ e $Q\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Como $\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ não é paralelo a $\vec{v}_r = (1,2,1)$, podemos escrever:

$$t : X = P + \lambda\, \overrightarrow{PQ}; \lambda \in IR$$



Solução 2:

Consideremos que exista uma reta t que passa por P e é concorrente com as retas r e s em A e B, respectivamente.

Assim, $A(\lambda - 1, 2\lambda - 3, \lambda)$, $B(h-2, 1-h, h)$, $\overrightarrow{PA} = (\lambda - 2, 2\lambda - 1, \lambda + 1)$ e $\overrightarrow{PB} = (h-3, 3-h, h+1)$. Como P, A e B são pontos colineares os vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são LD. Daí podemos escrever:

$$\frac{\lambda - 2}{h-3} = \frac{2\lambda - 1}{3-h} = \frac{\lambda + 1}{h+1}$$

De $\frac{\lambda - 2}{h-3} = \frac{2\lambda - 1}{3-h}$ temos $\lambda - 2 = 1 - 2\lambda$. Logo, $\lambda = 1$ e $\overrightarrow{PA} = (-1, 1, 2)$.

Considerando $\vec{v}_t = \overrightarrow{PA}$, as equações paramétricas da reta t são:

$$\begin{cases} x = 1 - a \\ y = -2 + a \quad ; a \in IR \\ z = -1 + 2a \end{cases}$$

11. Determine uma equação da reta que passa pelo ponto Q(2,1,0), é concorrente com a reta $s:\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}\ ; t \in IR$ e forma ângulos iguais com os eixos OX e OY.

Solução:

Sejam r a reta que queremos determinar e $\{I\} = r \cap s$. Assim $I = (2+t, 3t, t)$ e $\vec{v}_r = \overrightarrow{QI} = (t, 3t-1, t)$. Como $(r, OX) = (r, OY)$ temos a equação:

$$\frac{|(1,0,0)\cdot(t,3t-1,t)|}{|\vec{v}_r|} = \frac{|(0,1,0)\cdot(t,3t-1,t)\|}{|\vec{v}_r|}.$$

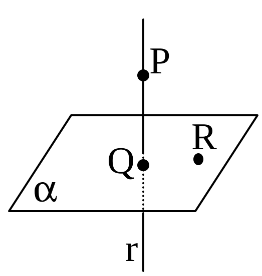
Logo, $t = \frac{1}{2}$ ou $t = \frac{1}{4}$.

Considerando $t = \frac{1}{2}$, temos $\vec{v}_r \mathbin{//} (1,1,1)$ e $r: X = (2,1,0) + h(1,1,1)\, ; h \in IR$.

Considerando $t = \frac{1}{4}$, temos $\vec{v}_r \mathbin{//} (1,-1,1)$ e $r: X = (2,1,0) + h(1,-1,1)\, ; h \in IR$.

Como vimos o exercício tem duas soluções.

12 . Da figura abaixo sabe – se que:



i) a reta r é perpendicular ao plano α, tem a direção do vetor $\vec{u} = (1,2,-1)$ e $P(1,1,-1)$ pertence à reta r.

ii) os pontos Q e $R(-1,0,1)$ pertecem ao plano α.

iii) S = (0,1,2)

Determine:

a) uma equação do plano α.
b) as coordenadas do ponto Q.
c) uma equação do plano QRS.
d) o ângulo entre os planos QRS e α.

e) a distância entre as retas r e RS.
f) uma equação do plano que contém a reta r e é paralelo à reta $t: X = (3,2,0) + h(2,0,-1)\,; h \in IR$
g) uma equação do plano perpendicular ao plano α que contém a reta QS.

Solução:

a) Como $\vec{n}_\alpha // \vec{v}_r = (1,2,-1)$ temos $\alpha: x + 2y - z + d = 0$. Além disso $R(-1,0,1) \in \alpha$, assim d = 2. Logo $\alpha: x + 2y - z + 2 = 0$.

b) As equações paramétricas da reta r são $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases} ; t \in IR$.

Como $\{Q\} = r \cap \alpha$ temos:

$$Q(1+t, 1+2t, -1-t) \text{ e } 1 + t + 2(1+2t) - (-1-t) + 2 = 0.$$

Logo, $t = -1$ e $Q(0,-1,0)$.

c) Os vetores $\overrightarrow{QR} = (-1,1,1)$ e $\overrightarrow{QS} = (0,2,2)$ são LI. Logo, podemos escrever uma equação vetorial do plano QRS como:

$$X = t(-1,1,1) + h(0,2,2)\,; t \text{ e } h \in IR .$$

d) Sabemos que $\vec{n}_\alpha = (1,2,-1)$ e $\vec{n}_{QRS} //(-1,1,1) \times (0,2,2) = (0,2,-2)$.

Assim, $\cos(QRS, \alpha) = \dfrac{|6|}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Logo $(QRS, \alpha) = 30°$.

e) Sabemos que $\vec{v}_r = (1,2,-1)$, $\overrightarrow{RS} = (0,1,2) - (-1,0,1) = (1,1,1)$ daí,

$[\vec{v}_r, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{QR}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -6$. Assim, as retas r e s são reversas.

Logo, $d(r, RS) = \dfrac{|[\vec{v}_r, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{QR}]|}{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{RS}|} = \dfrac{6}{|(3,-2,-1)|} = \dfrac{6}{\sqrt{14}} = \dfrac{3\sqrt{14}}{7}$.

f) Seja β o plano que queremos determinar. Os vetores $\vec{v}_r = (1,2,-1)$ e $\vec{v}_t = (2,0,-1)$ são LI e têm representantes β , logo uma equação vetorial do plano β é :

$$X = P + \lambda\,(1,2,-1) + \sigma\,(2,0,-1)\,;\ \lambda \text{ e } \sigma \in IR$$

g) Os vetores $\vec{n}_\alpha = (1,2,-1)$ e $\overrightarrow{QS} = (0,2,2)$ são LI e têm representantes no plano que queremos determinar. Assim uma equação deste plano é :

$$X = S + t\,(1,2,-1) + h\,(0,1,1)\,;\ t \text{ e } h \in IR$$

Exercícios propostos

01. Escreva uma equação da reta r nos casos a seguir:

a) r passa pelo ponto $P(-2,-1,3)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (2,1,1)$.

b) r passa pelos pontos $A(1,3,-1)$ e $B(0,2,3)$.

02. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o ponto P pertence à reta r:

a) $P(-2,1,1)$ e $r: X = (1,0,0) + h(-1,2,1);\ h \in IR$

b) $P(2,-1,-7)$ e $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -5 + 2t \end{cases};\ t \in IR$

c) $P\left(2, \frac{1}{2}, 3\right)$ e $r: x - 1 = 2(y - 2) = \frac{z}{3}$

03. Escreva uma equação do plano **a** nos casos a seguir:

a) **a** passa pelos pontos $A(1,0,2)$ e $B(2,-1,3)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (0,1,2)$.

b) **a** passa pelos pontos $A(3,1,-1)$ e $B(1,0,1)$ e é paralelo ao vetor $\overrightarrow{CD}$, sendo $C(1,2,1)$ e $D(0,1,0)$.

c) **a** passa pelos pontos $A(1,0,2)$, $B(1,0,3)$ e $C(2,1,3)$.

04. Verifique em cada um dos itens abaixo se o ponto P dado pertence ao plano π.

a) $P(1,-1,0)$, $\pi: X = (2,1,3) + h(1,0,1) + t(0,1,0);\ t \text{ e } h \in IR$

b) $P(2,1,3)$, $\pi: x + y - 2z + 3 = 0$.

c) $P(3,2,2)$, $\pi: \begin{cases} x = 1 - h + t \\ y = 2 - h - t \\ z = 1 - h \end{cases};\ t, h \in IR$

05. O ponto $P(2,2,-1)$ é o pé da perpendicular traçada do ponto $Q(5,4,-5)$ ao plano π. Determine uma equação de π.

06. Determine um vetor normal ao plano:

a) determinado pelos pontos $P(-1,0,0)$, $Q(0,1,0)$ e $R(0,0,-1)$.
b) $\alpha: 2x - y + 1 = 0$.
c) que passa pelos pontos $A(1,0,1)$ e $B(2,2,1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (1,-1,3)$.
d) $\alpha: \begin{cases} x = 1 + t + h \\ y = 1 - t + 2h \,;\, t \text{ e } h \in IR \\ z = h \end{cases}$

07. Determine as equações dos planos coordenados na forma geral.

08. a) Verifique se $P(1,3,-2)$ pertence a $r: \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ -x + y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$.

b) Escreva uma equação da reta r passa pelo ponto $P(1,1,1)$ e tem a direção

de um vetor normal ao plano $\alpha: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t + 3h \,;\; t \text{ e } h \in IR \\ z = t + h \end{cases}$.

09. Determine a equação geral do plano β paralelo ao plano

$\alpha: \begin{cases} x = 1 + h + 2t \\ y = 2 + 2h + t \,;\, h \text{ e } t \in IR \\ z = 3t \end{cases}$ e que

a) passa pelo ponto $P(3,2,0)$;
b) passa pela origem do sistema de coordenadas.

10. Determine uma equação do plano π:

a) que contém o eixo OX e passa pelo ponto $P(5,-2,1)$.
b) que passa pelo ponto $P(-2,1,3)$ e é perpendicular à reta $r: X = (1,0,1) + h(1,-3,2);\, h \in IR$.

11. Verifique se as retas r e s nos casos a seguir são coplanares:

a) $r:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y-z+1=0 \end{cases}$ e $s: X=(1,0,1)+h(3,-1,1);\ h\in IR$

b) $r: \dfrac{x-1}{2}=y+2=\dfrac{z-2}{3}$ e $s: X=(1,-2,2)+h\,(0,1,3)\,;h\in IR$

c) $r:\begin{cases} x=1+h \\ y=2-3h\,;h\in IR \\ z=h \end{cases}$ e $s: \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{2-y}{6}=\dfrac{z-2}{2}$

12. Determine o valor de **a** para que as retas r e s sejam concorrentes e ache o ponto de interseção, sendo:

$r: \dfrac{x}{2}=-\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{a}$ $\qquad$ $s:\begin{cases} x=3h-1 \\ y=2h-5\,;h\in IR\,. \\ z=h \end{cases}$

13. Determine, se possível, uma equação geral do plano determinado pelas retas r e s, nos casos a seguir:

a) $r: X=(1,2,0)+h\,(-1,2,3)\,;h\in IR$
$s: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=-z$

b) $r: X=(-1,2,1)+h\,(1,2,-1)\,;h\in IR$
$s: X=(2,5,-2)+t\,(-2,4,2)\,;t\in IR$

c) $r: X=(1,2,3)+h\,(1,0,2)\,;h\in IR$
$s:\begin{cases} x=2t \\ y=3 \qquad ;t\in IR \\ z=1+4t \end{cases}$

14. Sejam $\alpha: 2x + By + z + 1 = 0, \beta: x + y + \frac{z}{2} + D = 0,\ s: \begin{cases} x = 1 + h \\ y = h \\ z = A \end{cases} ; h \in IR$

e $r:\ x - 1 = -\frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$. Determine, se possível:

a) B, tal que α e β sejam paralelos.
b) B, tal que α e β sejam perpendiculares.
c) D, tal que $r \subset \beta$
d) A, tal que r e s sejam coplanares.

15. Considere os pontos $P(4, a, 4)$ e $Q(0, 3b + 8, b)$, as retas $r: x - 1 = \frac{2-y}{3} = z$

e $s: X = Q + t\,(1,0,2)\,;\ t \in IR$ e os planos $\pi_1: mx - 2y + (m+3)z - 1 = 0$ e $\pi_2: X = t(1,-3,1) + h(2,-3,1)\,;\ t \text{ e } h \in IR$. Determine, se possível:

a) **a**, de modo que a reta paralela à reta s que passa pelo ponto P seja reversa com a reta r.
b) **b** e **m**, de modo que a reta s seja paralela ao plano π_1.
c) **m**, de modo que os planos π_1 e π_2 sejam concorrentes segundo a reta r.

16. **a)** Determine uma equação da reta s que passa pela origem do sistema de coordenadas, é paralela ao plano $\pi: 3x - 2y + z - 2 = 0$ e intercepta a reta $r: x - 1 = \frac{y+2}{3} = z.$

b) Ache uma equação do plano α que passa pelo ponto P(2,1,3), é paralelo à reta $r: X = (1,2,3) + h(1,2,-1);\ h \in IR$, e é perpendicular ao plano $\pi: x - y + 2z - 4 = 0$.

17. Considere as retas r e t, tais que:

(i) r passa pelo ponto $P(3,1,-1)$ e é paralela à reta $s: \begin{cases} x - y + 3z - 5 = 0 \\ 3x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$;

(ii) t passa pela origem do sistema de coordenadas e seu vetor direção tem ângulos diretores iguais.

Determine:

a) as equações simétricas de r.
b) as equações paramétricas de t.

18. Dado o plano $\pi : X = (0,0,1) + h(1,-1,-1) + t(-1,-2,-4); h, t \in IR$ e a reta AB, sendo A(0,0,0) e B(1,1,1), determine uma equação do plano α que passa pelo ponto onde a reta AB fura o plano π e é paralelo ao plano $\beta : x - 3 = 0$.

19. a) Determine o simétrico de P(2,1,3) em relação:

(i) ao ponto $Q(3,-1,1)$.

(ii) à reta $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases} ; t \in IR$.

(iii) ao plano $2x - 2y + 3z = 2$.

b) Encontre uma equação da reta s simétrica da reta $t : x - 2 = y - 1 = z - 3$, em relação ao plano do item a(iii).

20. Determine o ângulo das retas $s : X = (1,0,0) + h(2,1,-1) ; h \in IR$ e $r : \dfrac{x-1}{2} = y = -z$.

21. Determine o ângulo da reta $r : x = -y = z$ com o plano α, nos casos a seguir:

a) $\alpha : 2x - y - z - 1 = 0$;

b) $\alpha : \begin{cases} x = 1 + 2h - t \\ y = h + t \\ z = 4 - 2t \end{cases} ; h, t \in IR$.

22. Determine o ângulo dos planos:

a) $\alpha : x + y - 2z = 0$ e $\beta : -2x + y + 3z - 2 = 0$;

b) $\alpha : \begin{cases} x = 2 - h \\ y = 1 + 2t \\ z = 2h - 3t \end{cases} ; h, t \in IR$ e $\beta : -2x + y + 3z - 2 = 0$.

23. Determine uma equação da reta s que passa por P(1,0,1) e intercepta a reta $r : x = y = z + 1$, formando um ângulo de $\dfrac{\pi}{3}$ rd.

24. Determine uma equação do plano α que passa pelo ponto P(2,1,1), é perpendicular ao plano coordenado yz e $(\alpha,\beta) = \arccos(2/3)\ rd$, sendo o plano $\beta: 2x - y + 2z + 3 = 0$.

25. Considere o plano α determinado pelo ponto P(1,2,0) e pela reta $r: \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z-4}{3}$. Calcule o ângulo que α forma com a reta $s: \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 4z = 0 \end{cases}$

26. Calcule a distância entre:

a) o ponto P(0,0,2) e a reta $r: \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 2z - 2 \end{cases}$.

b) o plano $\pi: X = (1,2,-1) + h(3,2,-1) + t(1,1,0);\ h, t \in IR$ e o ponto $P(2,1,-3)$.

c) as retas $r: \dfrac{x-1}{2} = 2 - y = z - 3$ e $s: \begin{cases} \dfrac{x-2}{5} = z \\ y = z - 1 \end{cases}$.

d) as retas $r: X = (1,0,0) + h(-2,4,2);\ h \in IR$ e $s: 2 - x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$.

e) a reta $r: x = -y = z$ e o plano $\pi: 2x - y - z - 1 = 0$.

27. a) Escreva as equações dos planos β e γ paralelos ao plano $\alpha: 2x - 2y - z = 3$ distando dele 5 unidades.

b) Encontre uma equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes de:

(i) A(1,–4,2) e B(7,1,–5)   (ii) A(1,2,1), B(1,4,3) e C(3,2,1)

c) Dados os pontos A(2,1,3), B(4,–1,1) e o plano $\alpha: 2x - y + 2z - 3 = 0$, determine uma equação da reta r contida em α, tal que todo ponto de r é equidistante dos pontos A e B.

28. De um triângulo ABC temos as seguintes informações:

(i) $A(1,2,-3)$ (ii) B e C são pontos da reta $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} ;\ t \in IR$.

Determine a altura do triângulo ABC relativa à base BC.

29. Considere $\alpha: 2x + 3y - z + 1 = 0$, $P(1,-4,5)$ e $s: \begin{cases} x = y + 1 \\ z = 3 \end{cases}$.

Determine, justificando:

a) d(P,s) b) d(P, α)

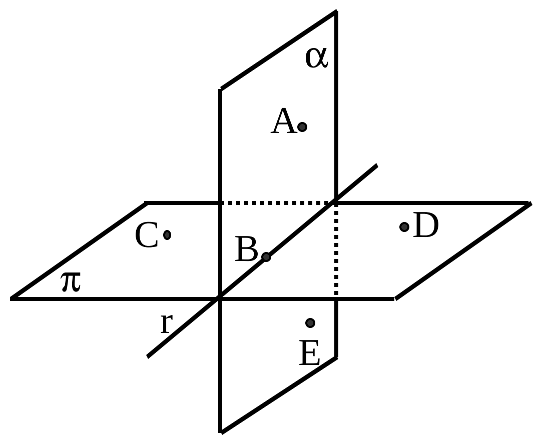
c) uma equação da reta m que satisfaz às três condições:
(i) d(P,m) = 0 (ii) d(m,s) = 0 (iii) d(m, α) = d(P, α).

30. Da figura ao lado sabemos que:

(i) os planos α e $\pi: x - z = 0$ são perpendiculares.

(ii) $A(0,2,-1)$ e $B(-1,3,-1)$.

(iii) C e D são pontos de π.



Determine:

a) Uma equação do plano α.

b) As equações paramétricas da reta r interseção dos planos α e π.

c) Uma equação do plano β que passa por A e é paralelo a π.

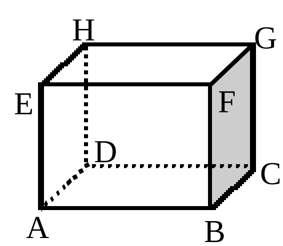
d) A altura do tetraedro ABCD relativa à base BCD.

e) As coordenadas do ponto E, sabendo que o triângulo ABE é equilátero e r contém a altura deste triângulo relativa ao vértice B.

31. Do paralelepípedo dado a seguir sabe-se que:

(i) O plano $ABC: x + y - z + 6 = 0$ e a reta $DG: X = t(1,2,-3),\ t \in IR$.

(ii) O plano ABF é perpendicular ao plano ABC e $F = (0,2,0)$.



Determine:

a) As equações simétricas da reta AF.

b) As equações paramétricas do plano ABF.

c) As coordenadas do ponto D.

d) Uma equação geral do plano EFG.

32. Determine o volume da pirâmide delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $5x - 2y + 4z = 20$.

33. Escreva as equações de uma reta t paralela aos planos α e β, e concorrente com as retas r e s, considerando:

$\alpha : 2x + y - z + 1 = 0$ $\qquad$ $\beta : x + 3y + 2z - 2 = 0$

$r : X = (1,2,1) + h(1,0,2);\ h \in IR$ $\qquad$ $s : X = (2,3,-2) + \lambda(1,-2,3);\ \lambda \in IR$

34. Seja r a reta interseção dos planos $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\beta : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$. Mostre que a equação $ax + by + cz + d + t(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0$, $t \in IR$, representa a família dos planos que contém a reta r, com exceção do plano β. Esta família é chamada de **feixe de planos de eixo r.**

35. Seja r a reta interseção dos planos $\alpha : x + y + z - 11 = 0$ e $\beta : x - 4y + 5z - 10 = 0$. Determine a equação do plano que contém a reta r, e:

a) passa pelo ponto $A(3,-1,4)$.

b) é paralelo ao plano $9x - 21y + 33z + 1 = 0$.

c) dista 3 unidades da origem do sistema de coordenadas.

d) é perpendicular a α.

e) é paralelo à reta $x = -\frac{y}{2} = -z$.

f) é paralelo ao eixo ox.

Respostas

01. a) $r : (x, y, z) = (-2,-1,3) + t\,(2,1,1);\ t \in IR$

b) $r : x - 1 = y - 3 = \frac{z+1}{-4}$

02. a) $P \notin r$ $\qquad$ b) $P \in r$ $\qquad$ c) $P \notin r$

03. a) $\alpha : (x, y, z) = (1,0,2) + t\,(1,-1,1) + h\,(0,1,2)\,;\ t \text{ e } h \in IR$

b) $\alpha : 3x - 4y + z - 4 = 0.$

c) $\alpha : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 + t + h \end{cases}\ ;\ t \text{ e } h \in IR$

04. a) $P \notin \pi$ b) $P \in \pi$ c) $P \in \pi$

05. $\pi : 3x + 2y - 4z - 14 = 0\,.$

06. a) $(1,-1,1)$ b) $(2,-1,0)$ c) $(2,-1,-1)$ d) $(1,1,-3)$

07. plano OXY : $z = 0$; plano OXZ : $y = 0$; plano OYZ : $x = 0$.

08. a) $P \in r$ **b)** $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}\ ;\ t \in IR\,.$

09. a) $2x - y - z - 4 = 0$ **b)** $2x - y - z = 0.$

10. a) $\pi : X = t\,(1,0,0) + h\,(5,-2,1)\,;\ t \text{ e } h \in IR$ ou $\pi :\ y + 2z = 0.$

b) $\pi : x - 3y + 2z - 1 = 0.$

11. a) Não **b)** Sim **c)** Sim

12. $a = 1,\ I(2,-3,1)\,.$

13. a) $\alpha : -11x + 5y - 7z + 1 = 0$ **b)** $\beta : x + z = 0$ **c)** $\gamma : -2x + z - 1 = 0$

14. a) $B = 2$ **b)** $B = -\dfrac{5}{2}$ **c)** $D = 1$ **d)** $A = -2$

15. a) $a \neq -4$ **b)** $m = -2$ e $b \neq -\dfrac{17}{5}$

c) $\nexists\ m \in IR$ tal que $\pi_1 \cap \pi_2 = r$

16. a) $s : X = h\left(1, \dfrac{17}{9}, \dfrac{7}{9}\right); h \in IR$ **b)** $\alpha : -x + y + z - 2 = 0$

17. a) $r:\ x-3=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$ **b)** $t:\begin{cases}x=h\\ y=h\\ z=h\end{cases}\ ;h\in IR.$

18. $\alpha:4x+3=0$

19. **a)** (i) $P'(4,-3,-1)$ (ii) $P'(0,-1,1)$ (iii) $P'\left(-\dfrac{2}{17},\dfrac{53}{17},-\dfrac{3}{17}\right)$

b) $s:X=(-1,-2,0)+h(15,87,-3)\ ;h\in IR$

20. $(r,s)=0°$

21. **a)** $(r,\alpha)=\text{arc sen}\left(\dfrac{2}{3\sqrt{2}}\right)$ **b)** $(r,\alpha)=\text{arc sen}\left(\sqrt{\dfrac{3}{29}}\right)$.

22. **a)** $(\alpha,\beta)=\text{arc cos}\left(\dfrac{7}{2\sqrt{21}}\right)$ **b)** $(\alpha,\beta)=\text{arc cos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{29}\sqrt{14}}\right)$.

23. $s:X=(1,0,1)+h(\sqrt{2},3+\sqrt{2},-3+\sqrt{2});\ h\in IR$ e

$s':X=(1,0,1)+t(-\sqrt{2},3-\sqrt{2},-3-\sqrt{2});\ t\in IR$.

24. $\alpha_1:\ z-1=0$ e $\alpha_2:\ 4y-3z-1=0$.

25. $(\alpha,s)=\text{arc sen}\left(\dfrac{14}{3\sqrt{105}}\right)$.

26. a) $d(P,r)=\sqrt{\dfrac{29}{6}}$ **b)** $d(P,\pi)=0$ **c)** $d(r,s)=\dfrac{32}{\sqrt{62}}$

d) $d(r,s)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ **e)** $d(r,\pi)=0$.

27. a) $\beta:2x-2y-z+12=0$ e $\gamma:2x-2y-z-18=0$.

b) (i) Plano $\pi:6x+5y-7z-27=0$. (ii) Reta $s:\begin{cases}x=2\\ y-2=3-z\end{cases}$

c) $r:\begin{cases}2x-y+2z-3=0\\ x-y-z-1=0\end{cases}$

28. $h = 2\sqrt{2}$ u.c.

29. **a)** $d(P,s) = 2\sqrt{3}$ **b)** $d(P,\alpha) = \sqrt{14}$ **c)** $m: X = (1,-4,5) + t(7,-3,5)\,;\ t \in IR$.

30. a) $\alpha: x + y + z - 1 = 0$ **b)** $r: \begin{cases} x = -1 + h \\ y = 3 - 2h \\ z = -1 + h \end{cases}\ ; h \in IR$. **c)** $\beta: x - z - 1 = 0$

d) $h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** $E(-1,2,0)$.

31. a) reta $AF: x = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-3}$ b) Plano $ABF: \begin{cases} x = t + h \\ y = 2 + 2t + h \\ z = -3t - h \end{cases}\ , t\,, h \in IR$.

c) $D = (-1,-2,3)$. d) Plano $EFG: x + y - z - 2 = 0$.

32. $V = \dfrac{100}{3}$ u.v.

33. $t: X = (4,-1,4) + h(1,-1,1)\ ;\ h \in IR$.

34. Se r é a reta interseção dos planos $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ e $\beta: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, todo ponto de r satisfaz às equações destes planos. Ou seja, se $P(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto de r, então $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ e $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 = 0$. Daí, o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ satisfaz à equação $ax + by + cz + d + t(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0$. Logo, esta última equação representa um plano que contém a reta r.

Por outro lado, seja $\gamma: \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}z + \bar{d} = 0$ um plano distinto de β e que contém a reta r. Vamos mostrar que existe um $t_0 \in IR$, tal que uma equação do plano γ é $ax + by + cz + d + t_0(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0$.
Então, se r está contida em γ as condições seguintes devem ser satisfeitas:

(i) $\vec{n}_\gamma \cdot \vec{v}_r = 0$ (ii) Todo ponto P de r pertence a γ.

Como r é a interseção de α e β, temos que $\vec{v}_r = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$, daí, $\vec{n}_\gamma \cdot (\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta) = 0$. Ou seja, $[\vec{n}_\gamma, \vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = 0$. Logo, os vetores $\vec{n}_\gamma, \vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são coplanares. Como $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são linearmente independentes, existem escalares t_1 e t_2, tais que $\vec{n}_\gamma = t_1 \vec{n}_\alpha + t_2 \vec{n}_\beta$. Observe que como γ e β são distintos, t_1 não pode ser igual a zero. Assim, podemos escrever: $\vec{n}_\gamma = \vec{n}_\alpha + \dfrac{t_2}{t_1} \vec{n}_\beta$.

Fazendo $t_0 = \dfrac{t_2}{t_1}$, temos $\vec{n}_\gamma = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (a + t_0 a_1, b + t_0 b_1, c + t_0 c_1)$. Então uma equação do plano γ é :

$$(a + t_0 a_1)x + (b + t_0 b_1)y + (c + t_0 c_1)z + \bar{d} = 0 .$$

Utilizando a condição (ii), seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de r, então temos:

$$(a + t_0 a_1)x_0 + (b + t_0 b_1)y_0 + (c + t_0 c_1)z_0 + \bar{d} = 0$$

Daí, $\bar{d} = (-ax_0 - by_0 - cz_0) + t_0(-a_1 x_0 - b_1 x_0 - c_1 z_0) = d + t_0 d_1$.
Portanto,

$$\gamma : ax + by + cz + d + t_0(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) = 0 .$$

35. **a)** $22x - 3y + 42z - 237 = 0$ **b)** $3x - 7y + 11z - 31 = 0$

c) $2x - 3y + 6z - 21 = 0$ ou $92x + 327y - 96z - 1059 = 0$

d) $x - 14y + 13z - 8 = 0$

e) $3x - 2y + 7z - 32 = 0$ **f)** $5y - 4z - 1 = 0$.