UFBA - UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

LISTA DE EXERCÍCIOS - VETORES, RETAS E PLANOS

Professora .:. Vanessa Barros de Oliveira.

Lista atualizada em 2018.1 pelo monitor de Geometria Analtica: Claudelino Oliveira.

Em caso de dúvidas, buscar contato via e-mail por: claudelinoliveira@gmail.com

1. Analise as proposições abaixo são verdadeiras ou falsas.

   (a) (   ) Se os vetores ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) são linearmente dependentes então os vetores ($\vec{u}$, $\vec{v}$) são linearmente dependentes.

   (b) (   ) Se dois vetores ($\vec{u}$, $\vec{v}$) são linearmente independentes então os vetores ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) são linearmente independentes (onde $\vec{w}$ é um terceiro vetor qualquer).

   (c) (   ) Sejam ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) vetores não nulos e linearmente dependentes, então, ($2\vec{u}$, -$\vec{v}$) são linearmente dependentes.

   (d) (   ) Se três vetores ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) são linearmente independentes então os vetores ($\vec{u}$, $\vec{v}$) são linearmente dependentes.

   (e) (   ) Se três vetores ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) são linearmente dependentes, então os vetores ($\vec{u}$, $\vec{v}$) podem ser linearmente dependentes ou independentes.

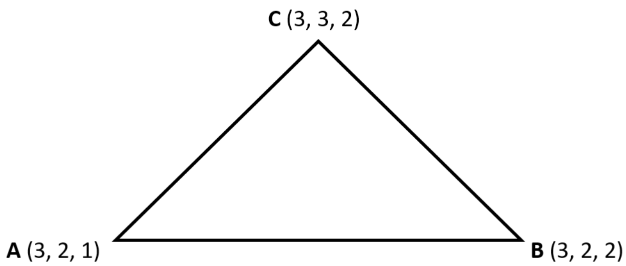
   (f) (   ) Se os vetores ($\vec{u}$, $\vec{v}$) são linearmente independentes, então os vetores ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) podem ser linearmente dependentes ou independentes.

2. Calcule todos os possíveis valores de m que tornam os vetores e abaixo linearmente dependentes.

   (a) $\vec{u} = (m, 1, m)$ e $\vec{v} = (1, m, 1)$

   (b) $\vec{u} = (1 - m^2, 1 - m, 0)$ e $\vec{v} = (m, m, m)$

3. Seja o triângulo ABC abaixo.



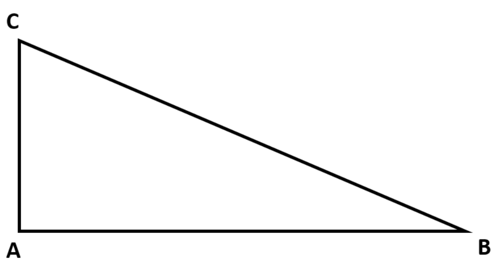
(a) Determine os ângulos do triângulo ABC.

(b) Determine o vetor $\vec{u}$ sabendo que ele é paralelo a $\vec{AB}$, tem sentido contrário e mede duas vezes o tamanho de $\vec{AB}$.

(c) Determine o ponto $D = B + \vec{u}$

4. Sabendo que a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é $(2, 1)$, $\vec{u} = (4, 2)$ e $|\vec{v}| = 5$, determine $\vec{v}$.

5. Seja ABC o triângulo abaixo retângulo em A.



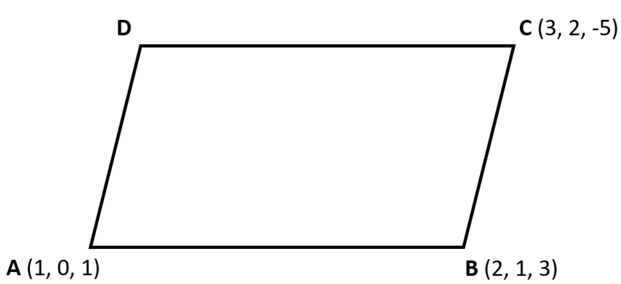
Sabendo que $|\vec{AB}| = |\vec{AC}| = 2$, responda os itens a seguir.

(a) Qual o módulo de $\vec{AB}x\vec{BA}$?

(b) Qual a direção de $\vec{BC}x\vec{BA}$?

(c) Qual o sentido (aponta para cima ou para baixo) de $\vec{BC}x\vec{BA}$?

6. Calcule a área do paralelogramo abaixo.



7. Determine as coordenadas do ponto Q simétrico do ponto $P(1, 0, 3)$ em relação ao ponto $M(1, 2, -1)$.

8. Seja r a reta determinada pelos pontos $A(1, 0, 1)$ e $B(3, -2, 3)$.

(a) Obtenha as equações de r nas formas vetorial, paramétrica e simétrica.

(b) Verifique se o ponto $P(-9, 10, -9)$ pertence a r.

(c) Sabendo que o vetor diretor de uma reta é qualquer vetor não nulo paralelo a ela, obtenha dois vetores diretores de r e dois pontos de r, distintos de A e B.

9. Seja π o plano que contém o ponto $A(3, 7, 1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 0)$.
   (a) Obtenha duas equações vetoriais de π.
   (b) Obtenha equações paramétricas de π.
   (c) Verifique se o ponto $(1, 2, 2)$ pertence a π.
   (d) Verifique se o vetor $\vec{w} = (2, 2, 5)$ é paralelo a π.

10. Determine a posião relativa entre os planos Ω: $2x + 3y + 4z = 5$ e β: $6x + 2y + 2z = 3$.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

LISTA DE EXERCÍCIOS - CÁLCULO VETORIAL

Professora: Vanessa Barros de Oliveira
Lista produzida pelos monitores Rodrigo, Diego e Álvaro.

Name:____

Produto escalar ($\vec{u}$. $\vec{v}$)

1. Dados os vetores $\vec{u} = (4, 0, 3)$ e $\vec{v} = (2, 3, 3)$. Calcule:
   (a) $\vec{u}$. $\vec{v}$
   (b) $|\vec{u}|$
   (c) $\vec{u}^o$
   (d) cos ($\vec{u}$, $\vec{v}$)
   (e) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais?
2. Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a seguir, calcule a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e cos ($\vec{u}$, $\vec{v}$) (identificando se é um ângulo agudo, obtuso ou se os vetores são ortogonais).
   (a) $\vec{u}$ = (4, 0, 3) e $\vec{v}$ = (2, 3, 3)
   (b) $\vec{u}$ = (1, 2, 2) e $\vec{v}$ = (2, 1, 3)
   (c) $\vec{u}$ = ($\sqrt{6}$, 1, 3) e $\vec{v}$ = (1, 2, 1)
   (d) $\vec{u}$ = (0, 2, 1) e $\vec{v}$ = (1, 1, 1)
3. Determine um vetor unitário que seja ortogonal aos vetores $\vec{u}$ = (1, -1, 4) e $\vec{v}$ = (3, 2, -2).
4. Encontre um vetor de norma 5, mas com mesma direção e sentido de cada um dos vetores: (1, 1, 1); (-1, 2, 3) e $(\frac{1}{3}, -1, 2)$.

5. Dados $\vec{u} = (5, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, 6, 3)$, $\vec{w} = (0, 1, 2)$ e k = 4. Calcule:
   (a) $\vec{u}$. $\vec{v}$
   (b) $\vec{v}$. $\vec{u}$
   (c) $\vec{u}$. ($\vec{v} + \vec{w}$)
   (d) $\vec{u}$. $\vec{v}$ + $\vec{u}$. $\vec{w}$

(e) k ($\vec{u}$. $\vec{v}$)
(f) (k $\vec{u}$) . $\vec{v}$
(g) $\vec{u}$. (k $\vec{v}$)
(h) $\vec{v}$. $\vec{v}$
(i) $|\vec{v}|^2$
(j) $\vec{v}/|\vec{v}|^2$

6. Mostre que A(3,0,2); B(4,3,0) e C(-2,3,1) são vértices de um triângulo retângulo. Em qual vértice está o ângulo reto?

7. Considere um paralelepípedo retangular de tamanho 2 cm x 3 cm x 4 cm. Encontre o ângulo entre a maior diagonal com a aresta de tamanho 4 cm.

Produto vetorial ($\vec{u}$ x $\vec{v}$)

8. Se $\vec{u} = (3, -1, -2)$, $\vec{v} = (2, 4, -1)$ e $\vec{w} = (-1, 0, 1)$, determine:
   (a) $|\vec{u}$ x $\vec{v}|$
   (b) (2 $\vec{v}$) x (3 $\vec{v}$)
   (c) ($\vec{u}$ x $\vec{w}$) + ($\vec{w}$ x $\vec{u}$)
   (d) ($\vec{u}$ x $\vec{v}$) x ($\vec{v}$ x $\vec{u}$)
   (e) ($\vec{u}$ - $\vec{v}$) x $\vec{w}$
   (f) $\vec{u}$ x ($\vec{v}$ x $\vec{w}$)

9. Determine o vetor $\vec{w} \in$ R^3 tal que $\vec{w}$ seja ortogonal ao eixo y e $\vec{u}$ = $\vec{w}$ x $\vec{v}$, onde $\vec{u}$ = (1, 1, -1) e $\vec{v}$ = (2, -1, 1).

10. Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (1, -1, 1)$ e $\vec{v} = (2, -3, 4)$. Calcule também a altura relativa à base definida pelo vetor $\vec{u}$.

11. Determine a distância do ponto P(5, 1, 2) à reta r que passa pelos pontos A(3, 1, 3) e B(4, -1, 1).

12. Dados os pontos A(2, 1, 1), B(3, -1, 0) e C(4, 2, -2), determine a área do triângulo ABC e a altura relativa ao vértice C.

13. Encontre um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos P, Q e R:
    (a) P(3, 0, 0), Q(0, 3, 0) e R(0, 0, 2)
    (b) P(2, 3, 0), Q(0, 2, 1) e R(2, 0, 2)

14. Determine z sabendo que A(2, 0, 0), B(0, 2, 0) e C(0, 0, z) são vértices de um triângulo de área 6.

15. Qual deve ser o valor de m para que os vetores $\vec{u} = (2, m, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e $\vec{w} = (-1, 3, -1)$ sejam coplanares?

16. Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais aos vetores (2, 3, -1) e (2, -4, 6). Quais desses vetores formam ângulo agudo com (1, 0, 0)?

17. Dados $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, -1)$ e $\vec{t} = (2, 1, -1)$, obtenha $\vec{u}$ de norma $\sqrt{5}$, ortogonal a $\vec{t}$, tal que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja L.D. Algum dos vetores encontrados forma ângulo agudo com (-1, 0, 0)?

18. Ache $\vec{x}$ tal que $\vec{x}$. (2, 3, 4) = 9 e $\vec{x}$ x (-1, 1, -1) = (-2, 0, 2).

19. Dado $\vec{b}$ = (1, 2, 1), determine $\vec{a}$ tal que $\vec{a}$ é ortogonal ao vetor (0, 0, 1) e $\vec{a}$ x $\vec{b}$ = (1, -1, 1).

Produto misto

20. Se $\vec{u} = (3, -1, -2)$, $\vec{v} = (2, 4, -1)$ e $\vec{w} = (-1, 0, 1)$, determine:

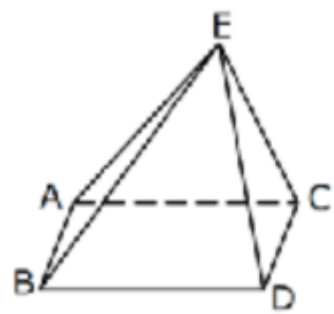
(a) ($\vec{u}$ x $\vec{v}$, $\vec{v}$)
(b) ($\vec{u}$ x $\vec{v}$, $\vec{w}$)
(c) ($\vec{u}$, $\vec{v}$ x $\vec{w}$)
(d) (2 $\vec{u}$ x $\vec{v}$, $\vec{v}$)
(e) ($\vec{u}$ x $\vec{v}$, 2 $\vec{v}$)
(f) 2 ($\vec{u}$ x $\vec{v}$, $\vec{v}$)

21. Qual o volume do cubo determinado pelos vetores (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1)?

22. Determine o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 1, 5)$.

23. Calcule o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{v1} = (0, -1, 2)$, $\vec{v2} = (-4, 2, -1)$ e $\vec{v3} = (3, m, -2)$ seja 33.

24. Sendo A(0,0,0), B(3,0,0), C(0,5,0), D(3,5,0) e E(3,5,5), determine o volume da figura abaixo.



25. Determinar o valor de R = $\vec{u}$. ($\vec{v}$ x $\vec{w}$) - [($\vec{v}$. ($\vec{u}$ + $\vec{w}$) + (5 $\vec{u}$. $\vec{w}$] para $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 4, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 3, -1)$.

26. Determine o vetor $\vec{u}$ = (m-1, m, m+1) para que os vetores {$\vec{w}$, $\vec{v}$, $\vec{u}$} sejam coplanares, onde $\vec{v} = (0, 3, 3)$ e $\vec{w} = (4, 1, -1)$.

27. Prove que [$\vec{u}$ + $\vec{v}$, $\vec{v}$ + $\vec{w}$, $\vec{u}$ + $\vec{w}$] = 2 [$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$].

28. Um triângulo reto de área 38 u.a. tem como catetos os vetores $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Sabendo que os dois vetores dados são coplanares com o vetor $\vec{w} = (1, 3, 2)$, determine o vetor $\vec{u}$.

29. Qual deve ser o valor de m para que os vetores $\vec{u} = (2, m, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e $\vec{w} = (-1, 3, -1)$ sejam coplanares?

Gabarito
Produto escalar

1. (a) 17
   (b) 5
   (c) ($\frac{4}{5}$, 0, $\frac{3}{5}$)
   (d) cos ($\vec{u}$, $\vec{v}$) = $\frac{17}{\sqrt{22}}$
   (e) Não

Cont.

Lista de Exercícios

Geometria Analitica

Ednaldo Luis Souza e Vanessa Barros

(distância,ângulo,cônicas)

1. Determine uma equação do plano ß que dista de 2 unidades de comprimento do plano Ω : $3x-3y+z-2=0$.

2. Sabendo que o ângulo entre a reta r (X= (1,0,1)+t(-1,2,0)) e a reta s é igual a $\pi/2$ e que as retas se cruzam no ponto P(-1,4,1), determine uma equação para a reta s cujo vetor diretor possui o valor da coordenada em y igual 5 (Vs= (a, 5, b)).

3. Sabendo que o ângulo usado para rotacionar a hipérbole abaixo foi $\pi/4$, determine a sua forma reduzida e esboce a curva.

$$xy=4$$

4. Sabendo que a elipse abaixo foi transladada, encontre sua forma reduzida, determine suas características (focos, vértices, centro, eixos focal e normal) e esboce-a:

$$x^2+4x+2y^2-4=0$$

5. Determine a equação de uma cônica cujo centro se encontra na reta r: $x-1=0$, um dos vértices em (5,0) e excentricidade $e=6/8$

6. Determine a equação de uma parábola com vértice em (1,2), d(foco, vértice)=2 e rotacionada de $\theta=\pi/3$.

7.Consideremos a equaçao $Ax^2+Bxy+Cy^2+D=0$, onde B é não nulo. Através de uma rotação elimine o termo misto.

8.Atraves de uma rotacao elimine o termo misto da equacao $x^2+4xy+y^2+2=0$. Você consegue identificar esta cônica?esboce o grafico.

OBS:

Leitura complementar :Cap5-Livro 'Cônicas e quádricas' do autor Jacir J. Venturi. Infelizmente ele não faz as demonstrações...

Questão 1.
a)Sabendo que a elipse $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$ foi rotacionada encontre o angulo θ de rotacao. Esboce a elipse.
b)Sabendo que a parabola $x^2 + 2xy + y^2 - 8y + 8x = 0$ foi rotacionada encontre o angulo θ de rotacao. Esboce a parabola.

Questão 2. Parábola, elipse ou hipérbole? Esboce o gráfico identificando o eixo focal e as coordenadas dos focos e vértices.

a)$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 2$	c)$x^2 - 6y = 0$	e)$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{3} = 2$
b)$y^2 - 4x = 0$	d)$\frac{(y-1)^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 2$	f)$(y+4)^2 - 4x - 8 = 0$

Questão 3. a)Determine a equação da parábola de vértice V(0,0) e foco F(1,1).Esboce o grafico
b)Determine a equação da elipse que tem focos $F_1(3,8)$ e $F_2(3,2)$ e medida do eixo maior igual a 10.Esboce o grafico

Questão 4. Considere as retas $r : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + z - 1 = 0, \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 4t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -6t, \end{cases}$ e o plano $\alpha : 2x + y - z + 1 = 0$. Determine o que se pede em cada item.

a. A posição relativa entre as retas r e s (paralelas, concorrentes ou reversas?se forem paralelas, são coincidentes ou não?).

b. O angulo e a distancia entre as retas r e s.

c. A posição relativa entre a reta r e o plano α (r é paralela ou concorrente a α? Se r for paralela a α ela está contida em α ou não? Se r for concorrente a α encontre o ponto de interseção).

d. O angulo e a distancia entre a reta r e o plano α.

e. A posição relativa entre a reta s e o plano α (r é paralela ou concorrente a α? Se r for paralela a α ela está contida em α ou não? Se r for concorrente a α encontre o ponto de interseção).

f. O angulo e a distancia entre a reta s e o plano α.

Questão 5
a)Encontre uma equacao vetorial para a reta r e para a reta s da questao anterior
b)Encontre uma equacao vetorial para o plano α da questao anterior