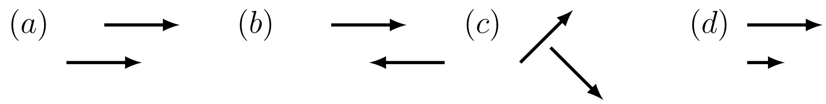
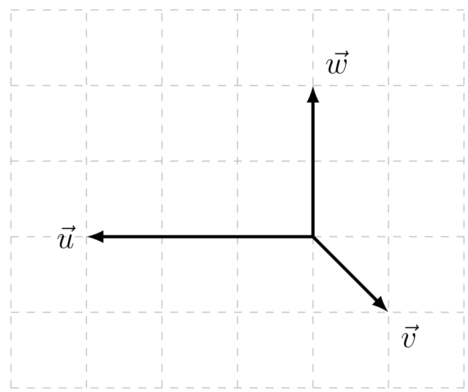
1.13 Exercícios

1.13.1. *Decida se os segmentos orientados de cada par representam o mesmo vetor.*



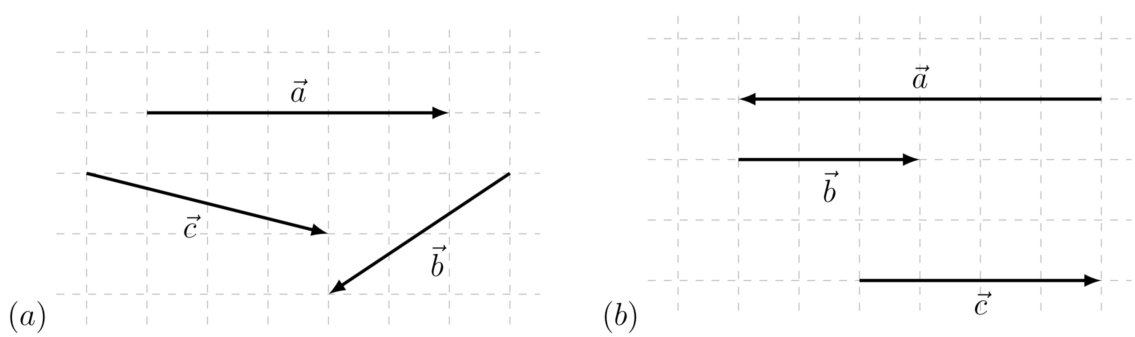
1.13.2. *Construa o vetor* $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.



1.13.3. *Construa os vetores*

$$\begin{aligned}\vec{u} &:= \vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\\ \vec{v} &:= \vec{b}-\vec{c}+\vec{a},\\ \vec{w} &:= \vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})\end{aligned}$$

nas seguintes situações:



1.13.4. *Considere os pontos A, B, C, D e E. Usando a relação de Chasles, simplifique as seguintes expressões vetoriais:*

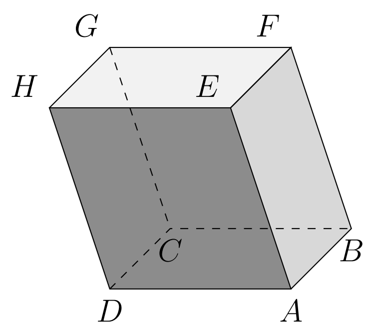
(a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$,

(b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$,

(c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$,

(d) $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$.

1.13.5. *Seja $\mathcal{P} = ABCDEFGH$ um paralelepípedo (veja a figura abaixo). Encontre uma expressão mais simples dos seguintes vetores:*



(a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$,

(b) $\vec{b} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$,

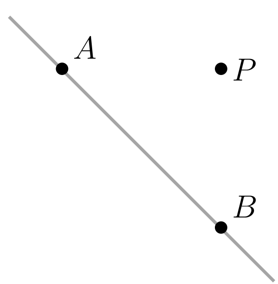
(c) $\vec{c} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$,

(d) $\vec{d} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$,

(e) $\vec{e} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$,

(f) $\vec{f} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$.

1.13.6. *Sejam A e B dois pontos distintos. Em cada situação, represente geometricamente o ponto P tal que a igualdade vetorial indicada seja satisfeita:*



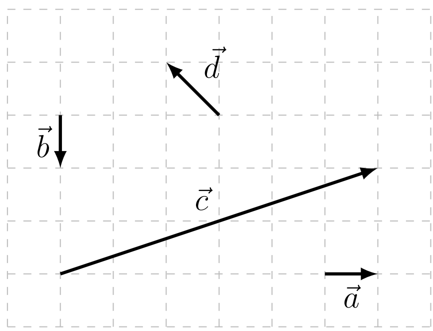
(a) $\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AB}$,

(b) $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

(c) $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{PB}$,

(d) $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$.

1.13.7. *Considere os vetores da figura abaixo:*

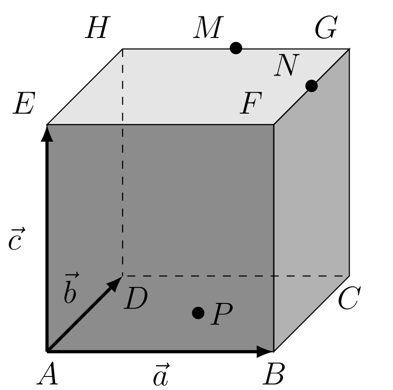


(a) Escreva $\vec{c}$ e $\vec{d}$ como combinação linear de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

(b) Defina $\vec{x} := -\frac{1}{2}\vec{c} - 5\vec{d}$. Escreva $\vec{x}$ como combinação linear de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

(c) Escreva $\vec{a}$ e $\vec{b}$ como combinações lineares de $\vec{c}$ e $\vec{d}$.

1.13.8. *Seja $\mathcal{C} = ABCDEFGH$ um cubo. Defina $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} := \overrightarrow{AD}$ e $\vec{c} := \overrightarrow{AE}$. Denotamos por M o ponto médio de $\overline{FG}$, N o de $\overline{HG}$ e por P o centro da faceta $ABCD$.*



Escreva os seguintes vetores como combinações lineares dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$:

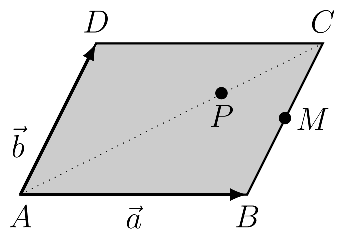
$\overrightarrow{EP}, \overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EN}, \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{PM}$.

1.13.9. *Represente um quadrado $ABCD$ e construa os pontos E, F, G e H tais que:*

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}, \qquad \overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD},$$
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}, \qquad \overrightarrow{DH} = -2\overrightarrow{DA} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Mostre que o quadrilátero $EFGH$ é um paralelogramo.

1.13.10. *Seja $\mathcal{P} = ABCD$ um paralelogramo. Definimos $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} := \overrightarrow{AD}$ e denotamos por M o ponto médio de $\overline{BC}$. Seja também P o único ponto que satisfaz $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC}$.*



Escreva $\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PM}$ e $\overrightarrow{DM}$ como combinações lineares de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

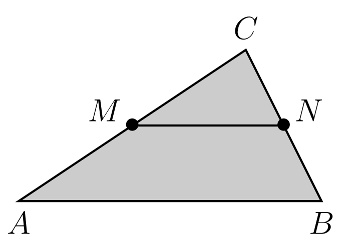
1.13.11. *Suponha que os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{v}$ satisfaçam*

$$3(\vec{a} - 2\vec{v}) - 6\vec{b} = -7\Big(\frac{15}{7}\vec{v} - 3\vec{b}\Big) + 12\vec{a}.$$

Escreva $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

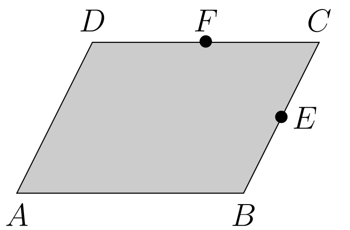
1.13.12. *Resolva a equação $3\vec{x} - 4\vec{u} = 2(3\vec{u} - \vec{x})$ na incógnita $\vec{x}$.*

1.13.13. *Sejam ABC um triângulo, M o ponto médio de $\overline{AC}$ e N o ponto médio de $\overline{BC}$.*



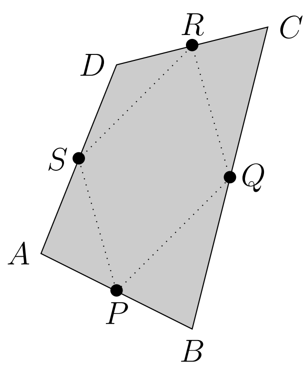
Mostre que as retas (AB) e (MN) são paralelas.

1.13.14. *Seja $\mathcal{P} = ABCD$ um paralelogramo. Sejam E o ponto médio de $\overline{BC}$ e F o ponto médio de $\overline{DC}$.*



Mostre que $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

1.13.15. *Seja $\mathcal{Q} = ABCD$ um quadrilátero e sejam P, Q, R, S os pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente.*



(a) Mostre que $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SR}$.

(b) O que podemos deduzir sobre o quadrilátero $PQRS$?

1.13.16. *Sejam O, A, B, C e D cinco pontos que satisfazem*

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$

Mostre que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

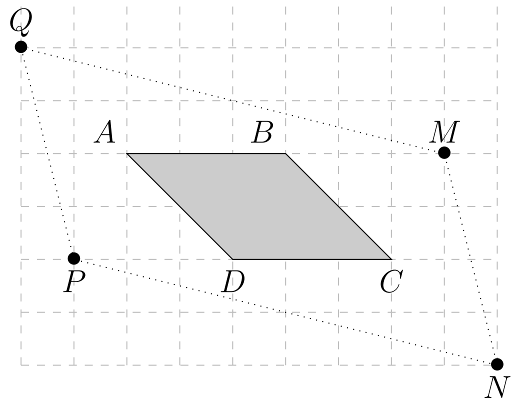
1.13.17. *Seja $\mathcal{Q} = ABCD$ um quadrilátero. Denotamos por I o ponto médio de $\overline{AC}$ e por J o ponto médio de $\overline{DB}$.*

(a) Mostre que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

(b) Deduza que $\mathcal{Q}$ é um paralelogramo se e somente se $I = J$.

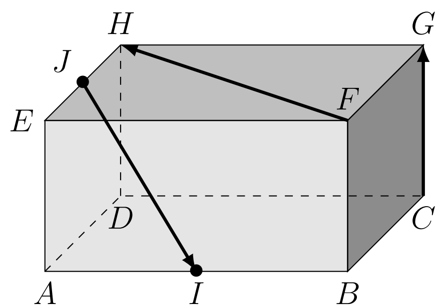
1.13.18. *Seja $\mathcal{P} = ABCD$ um paralelogramo e sejam M, N, P, Q os pontos definidos pelas seguintes relações vetoriais:*

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DQ} = 2\overrightarrow{DA}.$$



Mostre que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

1.13.19. Seja $\mathcal{P} = ABCDEFGH$ um paralelepípedo. Denotamos por I e J os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{EH}$, respectivamente.



Mostre que os vetores $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{JI}$ e $\overrightarrow{FH}$ são coplanares.

1.13.20. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ dois vetores. Mostre que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, então $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$ também o são.*

1.13.21. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores LI, a, b, c três números reais e $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$. Mostre que os vetores $\vec{u}+\vec{t}, \vec{v}+\vec{t}, \vec{w}+\vec{t}$ são LI se e somente se $a+b+c+1 \neq 0$.*

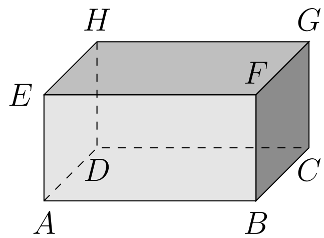
1.13.22. *Seja $\mathcal{P} = ABCDEFGH$ um paralelepípedo. Determine por leitura gráfica se os vetores de cada tripla são linearmente independentes. Caso eles forem linearmente dependentes (i.e. coplanares), encontre uma "relação linear" entre eles (isto é, escreva um deles como combinação linear dos outros).*

(a) $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DG}$.

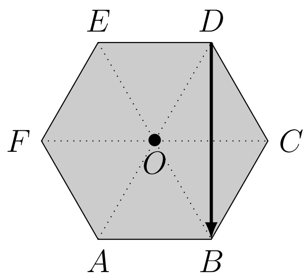
(b) $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{AB}$.

(c) $\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{CD}$.

(d) $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{GH}$.



1.13.23. *Lembramos que um* ***exágono regular*** *é um polígono que possui 6 lados de mesmo comprimento (veja a figura abaixo).*



Determine as coordenadas de $\overrightarrow{DB}$ em relação às bases $\mathscr{B}_1 := \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ e $\mathscr{B}_2 := \{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{DE}\}$.

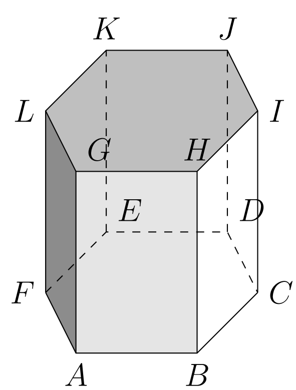
1.13.24. *Seja $\mathcal{P} = ABCDEFGHIJKL$ um prisma cujas bases são exágonos regulares. Determine por leitura gráfica se os vetores de cada tripla são linearmente independentes. Caso eles forem linearmente dependentes, encontre uma relação linear entre eles (isto é, escreva um deles como combinação linear dos outros).*

(a) $\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{BC}$.

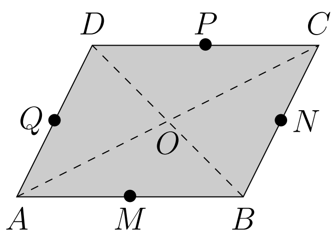
(b) $\overrightarrow{LG}, \overrightarrow{ID}, \overrightarrow{KB}$.

(c) $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{JD}, \overrightarrow{HI}$.

(d) $\overrightarrow{KF}, \overrightarrow{CH}, \overrightarrow{GD}$.



1.13.25. *Seja $\mathcal{P} = ABCD$ um paralelogramo e sejam M, N, P, Q os pontos médios dos segmentos orientados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Denotamos por O a interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.*



Encontre as coordenadas dos vetores

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{CM}$

em relação às bases $\mathscr{B}_1 = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ e $\mathscr{B}_2 = \{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}\}$.

1.13.26. *Seja $\mathscr{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ uma base do plano e sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ três vetores cujas coordenadas em relação à $\mathscr{B}$ são:*

$$\vec{a} = (5, -3), \quad \vec{b} = (4, -4), \quad \vec{c} = (12, -6).$$

Calcule as coordenadas, em relação à $\mathscr{B}$, dos seguintes vetores:

(*a*) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$.

(*b*) $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$.

(*c*) $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

1.13.27. *Seja $\mathscr{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ uma base do plano e sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ três vetores cujas coordenadas em relação à $\mathscr{B}$ são:*

$$\vec{a} = (2, 4), \quad \vec{b} = (3, -9), \quad \vec{c} = (12, -6).$$

Mostre que existem dois números reais α e β tais que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$.

1.13.28. *Sejam $\mathscr{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ e $\mathscr{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ duas bases du plano. Suponha que as coordenadas dos vetores de $\mathscr{B}_2$ sejam dadas, em relação à $\mathscr{B}_1$, por*

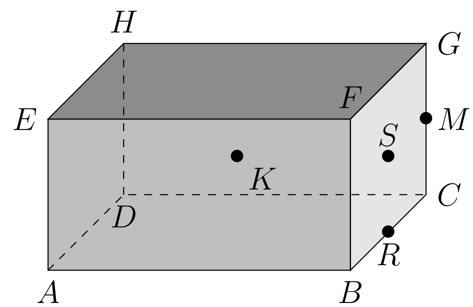
$$\vec{v}_1 = (1, 1)_{\mathscr{B}_1}, \qquad \vec{v}_2 = (2, 3)_{\mathscr{B}_1}.$$

(*a*) *Encontre as coordenadas de $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ em relação à $\mathscr{B}_1$.*

(*b*) *Encontre as coordenadas de $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ em relação à $\mathscr{B}_2$.*

1.13.29. *Seja $\mathcal{P} = ABCDEFGH$ um paralelepípedo. Denotamos por*

- K o centro de $\mathcal{P}$,
- M o ponto médio de $\overline{CG}$,
- R o ponto médio de $\overline{BC}$,
- S o centro da faceta $BCFG$.



Encontre as coordenadas dos vetores

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AS},\ \overrightarrow{AR},\ \overrightarrow{AK}$$

em relação às bases $\mathscr{B}_1 = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\}$ e $\mathscr{B}_2 := \{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BR}\}$.

1.13.30. *Seja $\mathscr{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base do espaço e sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ três vetores cujas coordenadas em relação à $\mathscr{B}$ são:*

$$\vec{a} = (6, -2, 0), \quad \vec{b} = (9, 3, -3), \quad \vec{c} = (0, -3, 2).$$

Calcule as coordenadas dos vetores $\vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{t}$, os quais satisfazem as seguinte relações vetoriais:

- $\vec{v} + 2\vec{a} = \vec{b} - 2\vec{c}$,
- $6\big(\vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{w}\big) + 2\vec{b} = \vec{0}$,
- $2\vec{t} - \vec{a} = \frac{3}{2}\big(2\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{t}\big) + \frac{2}{3}\vec{b}$.

1.13.31. *Caso seja possível, escreva $\vec{v}$ como combinação linear dos vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$, nas seguintes situações:*

(a) $\vec{a} = (3, 5, 2),\ \vec{b} = (4, -8, 6),\ \vec{c} = (-16, 10, 7),\ \vec{v} = (0, 0, 52)$.

(b) $\vec{a} = (2, 1, 1),\ \vec{b} = (-1, 7, -5),\ \vec{c} = (1, 3, -1),\ \vec{v} = (7, 3, 4)$.

1.13.32. *Seja $\mathscr{B}$ uma base do plano e sejam $\vec{u}, \vec{v}$ dois vetores cujas coordenadas em relação à $\mathscr{B}$ são:*

$$\vec{u} = (a, b), \qquad \vec{v} = (c, d).$$

Lembramos que o determinante de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o número real definido por

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) := \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

(a) Mostre que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e somente se $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

(b) Determine todos os números reais x tais que $\vec{u} = (x, 3)$ e $\vec{v} = (x+1, x+1)$ sejam colineares.

1.13.33. *Determine os números reais x tais que os vetores de cada par sejam colineares.*

(a) $(1, 5)$ *e* $(-2, x+4)$,

(b) $(x, x+4)$ *e* $(3, x-1)$.

1.13.34. *Seja $\mathscr{B}$ uma base do espaço. Dado um número real x, considere os seguintes vetores:*

$$\vec{u} = (-x, 1-x, 3),$$
$$\vec{v} = (0, 1, x),$$
$$\vec{w} = (1, 2, x).$$

Determine todos os números reais x tais que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sejam LD.

1.13.35. *Seja $\mathscr{B}$ uma base do plano e sejam $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ três vetores cujas coordenadas em relação à $\mathscr{B}$ são:*

$$\vec{a} = (7, -2), \quad \vec{b} = (-3, 5), \quad \vec{c} = (0, 5).$$

Encontre um número real λ e um vetor $\vec{x}$ colinear a $\vec{a}$ tais que $\vec{x} + \lambda\vec{b} = \vec{c}$.

1.13.36. *Decida se os vetores de cada tripla são coplanares.*

(a) $\vec{a} = (2, -1, 5)$, $\vec{b} = (-3, 0, 2)$, $\vec{c} = (6, -3, 15)$,

(b) $\vec{a} = (7, -4, 1)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$, $\vec{c} = (2, 1, -1)$,

(c) $\vec{a} = (3, 0, -1)$, $\vec{b} = (5, 1, 4)$, $\vec{c} = (13, 2, 7)$,

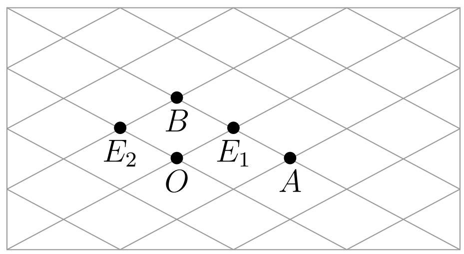
(d) $\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 1)$, $\vec{c} = (2, -4, -2)$,

(e) $\vec{a} = (2, -1, 5)$, $\vec{b} = (0, 2, 3)$, $\vec{c} = (6, -11, 4)$.

1.13.37. *Encontre todos os números reais x tais que os seguintes vetores sejam coplanares:*

$$\vec{a} = (2, 1, 2), \quad \vec{b} = (1, x, 1), \quad \vec{c} = (3, 1, x).$$

1.13.38. *Considere a seguinte figura:*



(a) *Represente os pontos cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas cartesianas $\{O, \overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}\}$, são dadas por:*

$$M(4,1), \quad N(-3,0), \quad P(0,2), \quad Q(2,3), \quad R(1,-3), \quad S(0,-3), \quad T(5,0).$$

(b) *Determina as coordenadas desses pontos em relação ao sistema de coordenadas $\{O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$.*

1.13.39. *Seja $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ um sistema de coordenadas cartesianas do plano, e sejam A, B dois pontos. Suponha que $A = A(3,4)$ e $B = B(-3,3)$. Calcule as coordenadas dos pontos C, D, L, R tais que*

$$\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{LA} = \frac{5}{3}\overrightarrow{LB}, \quad \overrightarrow{RA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{RB}.$$

1.13.40. *Seja $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ um sistema de coordenadas cartesianas do plano e sejam $A(1,1)$, $B(10,5)$ e $C(4,12)$ três pontos. Calcule as coordenadas de D tal que*

(a) *$ABCD$ seja um paralelogramo,*

(b) *$ABDC$ seja um paralelogramo.*

1.13.41. *Decida se os pontos $A(-56, 84)$, $B(16, -24)$ e $C(-8, 12)$ estão alinhados.*

1.13.42. *Determine todos os números reais x tais que os pontos de cada tripla estejam alinhados.*

(a) $A(1,2)$, $B(-3,3)$, $C(x,1)$,

(b) $A(2,x)$, $B(7x-29,5)$, $C(-4,2)$.

1.13.43. *Seja* $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ *um sistema de coordenadas cartesianas do plano e sejam* $A(7,-3)$, $B(23,-6)$. *Determine as coordenadas do ponto* C *tais que as seguintes condições sejam satisfeitas simultaneamente:*

(a) C *pertence ao eixo das abscissas;*

(b) A, B *e* C *estão alinhados.*

1.13.44. *Dados os pontos* $A(5,2,-3)$, $B(8,0,5)$, $C(-2,-4,-1)$ *e* $D(4,-6,3)$, *calcule as coordenadas dos seguintes vetores:*

(a) $\overrightarrow{AB}$,

(b) $\overrightarrow{BD}$,

(c) $\overrightarrow{CA}$,

(d) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$,

(e) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$,

(f) $4\overrightarrow{AC}-3(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC})$.

1.13.45. *Seja* $\mathcal{P}=ABCD$ *um paralelogramo. Denotamos por* P *a interseção das diagonais* $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$. *Suponha que* $A=A(3,-2,5)$, $B=B(7,5,10)$ *e* $P=P(5,4,6)$. *Calcule as coordenadas de* C *e* D.

1.13.46. *Mostre que os pontos* $A(13,-22,2)$, $B(-53,-10,26)$ *e* $C(-38,12,60)$ *não estão alinhados.*

1.13.47. *Determine todos os números reais x tais que os seguintes pontos estejam alinhados:*

$$A(x,-3,-4),\qquad B(3,1,0),\qquad C(0,x+2,x+1).$$

1.13.48. *Decida se os quatro pontos* $A(0,2,4)$, $B(1,-1,3)$, $C(-8,2,1)$ *e* $D(-6,-4,-1)$ *são coplanares, isto é, se eles pertencem a um mesmo plano.*

Lembrete: quatro pontos A, B, C *e* D *são coplanares se e somente se os vetores* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *e* $\overrightarrow{AD}$ *são colineares.*

1.14 Exercícios complementares

1.14.1. *Dados um ponto A e um vetor $\vec{u}$, mostre que existe um ponto B tal que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.*

1.14.2. *Mostre todos os itens da Proposição* ***Propriedades da soma de um ponto com um vetor****.*

1.14.3. *Sejam A um ponto e $\vec{u}$, $\vec{v}$ dois vetores. Mostre que*

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = (A + \vec{v}) + \vec{u}.$$

1.14.4. *Sejam A, B dois pontos e $\vec{u}$ um vetor. Mostre que $A + \vec{u} = B$ se e somente se $A = B + (-\vec{u})$.*

1.14.5. *Mostre todos os itens da Proposição* ***Propriedades da soma entre vetores****. (A relação de Chasles poderá ser usada.)*

1.14.6 (Leis do cancelamento). *Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores. Mostre que se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, então $\vec{v} = \vec{w}$.*

1.14.7. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores. Mostre a seguinte equivalência:*

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}.$$

1.14.8. *Mostre a* ***relação de Chasles****.*

1.14.9. *Seja $\vec{u}$ um vetor. Mostre que $2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$.*

1.14.10. *Sejam a um número real e $\vec{u}$ um vetor. Mostre que se $a\vec{u} = \vec{0}$, então $a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.*

1.14.11. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ dois vetores e a um número real não nulo. Mostre que se $a\vec{u} = a\vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$.*

1.14.12. *Mostre a Proposição 1.9.3.*

1.14.13. *Mostre todos os itens da Proposição* ***Operações entre vetores em coordenadas****.*

2.8 Exercícios

Em todos os exercícios, o plano e o espaço são munidos de uma base *ortonormal.*

2.8.1. *Mostre o Teorema de Pitágoras usando o produto escalar.*

2.8.2. (*a*) *Calcule a norma dos seguintes vetores do plano e do espaço:*

$$\vec{a} = (0,5), \quad \vec{b} = (3,8), \quad \vec{c} = (1,2,-2), \quad \vec{d} = (0,1,-1).$$

(*b*) *Mostre que os seguintes vetores são unitários:*

$$\vec{e} = \Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \Big), \quad \vec{f} = \Big(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \Big).$$

2.8.3.

(*a*) *Sejam* $\vec{a} = (3,4)$, $\vec{b} = (12,-5)$ *e* $\vec{c} = (-6,0)$. *Calcule*

$$\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\|, \quad \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|, \quad \| -2\vec{a}\| + \|2\vec{a}\|, \quad \Big\| \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \Big\|.$$

(*b*) *Determine todos os números reais* k *tal que a norma de* $\vec{d} := (8, k-1)$ *seja 10.*

(*c*) *Sejam* $\vec{u} = (2,3)$ *e* $\vec{v} = (-2,4)$. *Determine todos os números reais* m *tal que* $\|\vec{u} + m\vec{v}\| = \sqrt{82}$.

2.8.4. *Sejam* $A(2,1,3)$, $B(4,3,4)$ *e* $C(2,6,-9)$. *Calcule o perímetro do triângulo* ABC.

2.8.5. *Sejam* $A(6,4)$, $B(12,-2)$ *e* $C(17,9)$. *Mostre que o triângulo* ABC *é isósceles e calcule sua área.*

2.8.6. *Sejam* $A(7,1)$, $B(5,5)$, $C(5,-3)$ *e* $I(2,1)$. *Mostre que os pontos* A, B *e* C *pertencem a um círculo de centro* I.

2.8.7. *Sejam* $A(3,1)$, $B(2,3)$ *e* $C(6,5)$. *Mostre que o triângulo* ABC *é retângulo.*

2.8.8. *Sejam $A(4,0,-3)$, $B(10,2,0)$, $C(8,-1,6)$ e $D(2,-3,3)$. Mostre que o quadrilátero $ABCD$ é um losango. (Lembramos que um losango é um quadrilátero formado por quatro lados de igual comprimento.)*

2.8.9. *Sejam $A(4,-1)$ e $B(-5,11)$. Determine todos os pontos da reta (AB) que estão a uma distância 3 de A.*

2.8.10. *Determine o número real k tal que $P(2,-1)$ pertença a mediatriz do segmento formado pelos pontos $A(5,3)$ e $B(-2,k)$.*

2.8.11. *Determine o ponto do eixo das ordenadas que esteja a mesma distância que os pontos $A(3,4,-7)$ e $B(-1,2,1)$.*

2.8.12. *Decida se os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais nas seguintes situações:*

(*a*) $\vec{a} = (2,-5)$, $\vec{b} = (7,3)$,

(*b*) $\vec{a} = (53,-41)$, $\vec{b} = (41,53)$,

(*c*) $\vec{a} = (1,-1,1)$, $\vec{b} = (1,3,2)$,

(*d*) $\vec{a} = (6,1,4)$, $\vec{b} = (2,0,-3)$.

2.8.13. *Sejam $A(-4,-3)$, $B(2,0)$ e $C(0,4)$. Mostre que as retas (AB) e (BC) são ortogonais. Determine o ponto D tal que o quadrilátero $ABCD$ seja um rectângulo.*

2.8.14. (*a*) *Para quais valores de m os vetores $(m,-2)$ e $(3,5)$ estão ortogonais?*

(*b*) *Sejam $\vec{a} = (1,2,-3)$, $\vec{b} = (2,1,4)$ e $\vec{c} = (6,-5,0)$. Determine o número real k tal que $\vec{a} + k\vec{b}$ e $\vec{c}$ sejam ortogonais.*

(*c*) *Sejam $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (-3,11)$. Encontre um vetor $\vec{w}$ e um número real k tais que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ estejam ortogonais e $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w}$.*

(*d*) *Determine a e b tais que $(7,a,b)$ esteja ortogonal aos vetores $(4,3,8)$ e $(-5,20,9)$.*

2.8.15. *Sejam $A(-2,4)$, $B(1,-2)$ e $C(\lambda,\lambda)$. Determine λ tal que o triângulo ABC esteja retângulo*

(*a*) *em A,*

(*b*) *em* B,

(*c*) *em* C.

2.8.16. *Sejam* $A(-2,3,-2)$ *e* $B(-6,-1,1)$. *Determine o ponto* P *que pertence ao eixo das abscissas e tal que o triângulo* APB *seja retângulo em* P.

2.8.17. *Seja* $\vec{u} = (u_1, u_2)$ *um vetor não nulo. Mostre que um vetor* $\vec{v}$ *é ortogonal a* $\vec{u}$ *se e somente se existe um número real* λ *tal que* $\vec{v} = \lambda(-u_2, u_1)$.

2.8.18. *Encontre um vetor* $\vec{b}$ *ortogonal ao vetor* $\vec{a} := (-3,4)$ *e tal que* $\|\vec{b}\| = 2$.

2.8.19. (*a*) *Encontre todos os vetores* $\vec{v}$ *ortogonais ao vetor* $\vec{u} = (1,-5)$ *e tal que* $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

(*b*) *Seja* $\vec{t} = (-4,5)$. *Encontre todos os vetores* $\vec{v}$ *ortogonais a* $\vec{t}$ *e tal que* $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}\|\vec{t}\|$.

(*c*) *Encontre um vetor* $\vec{v}$ *ortogonal ao vetor* $\vec{w} = (5,12)$ *e tal que* $\|v\| = 10$.

2.8.20. *Sejam* $A(1,3)$ *e* $C(7,9)$ *dois vértices do losango* $ABCD$.

(*a*) *Determine as coordenadas do ponto* M *de interseção das diagonais de* $ABCD$.

(*b*) *Suponha que* $\|\overrightarrow{BD}\| = 2\|\overrightarrow{AC}\|$. *Determine as coordenadas de* B *e* D.

2.8.21. *Sejam* $A(1,5)$ *e* $B(4,9)$. *Encontre as coordenadas dos pontos* C *e* D *tais que o quadrilátero* $ABCD$ *seja um retângulo cuja área é 50.*

2.8.22. *Seja* ABC *um triângulo e seja* M *o ponto médio de* $\overline{BC}$.

(a) Mostre que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

(b) Mostre que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = -\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|^2$.

(c) Mostre que ABC *é isósceles em* A *se e somente se as retas* (BC) *e* (AM) *são ortogonais.*

2.8.23. *Sejam* $B(4,8)$ *e* $C(9,-4)$. *Determine o ponto* $A = A(x,y)$, *sabendo que* $x > 0$, ABC *é isósceles em* A *e a área de* ABC *é 169.*

2.8.24. *Sejam* $\vec{a} = (3,1)$ *e* $\vec{b} = (8,-4)$. *Represente graficamente os vetores* $\text{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$ *e* $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$.

2.8.25. *Calcule as coordenadas do vetor* $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$, *onde* $\vec{a} = (-4,2)$ *e* $\vec{b} = (-3,5)$.

2.8.26. *Calcule as coordenadas dos vetores* $\text{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$ e $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ *nas seguintes situações:*

(a) $\vec{a} = (6,2)$, $\vec{b} = (3,-9)$,

(b) $\vec{a} = (1,0)$, $\vec{b} = (3,-4)$,

(c) $\vec{a} = (1,8,0)$, $\vec{b} = (2,2,3)$,

(d) $\vec{a} = (1,2,-2)$, $\vec{b} = (2,0,-3)$.

2.8.27. *Sejam* $\vec{a} = (2,-1,3)$ *e* $\vec{b} = (4,-1,2)$. *Encontre dois vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *tais que as três condições abaixo sejam satisfeitas simultaneamente.*

- $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$,
- $\vec{u}$ e $\vec{b}$ *são colineares,*
- $\vec{v}$ e $\vec{b}$ *são ortogonais.*

2.8.28. *Sejam* $A(1,2,3)$, $B(4,8,-3)$ *e* $C = (6,3,2)$.

(a) *Calcule o comprimento da altura do triângulo* ABC *passando pelo ponto* C.

(b) *Calcule a área de* ABC.

2.8.29. *Calcule o ângulo formado pelos vetores* $(1,2)$ *e* $(-1,-1)$.

2.8.30. *Calcule os ângulos do triângulo* ABC, *onde* $A(2,-3)$, $B(3,2)$ *e* $C(-2,4)$.

2.8.31. *Sejam* $\vec{a} = (a_1,a_2)$ *e* $\vec{b} = (b_1,b_2)$ *dois vetores do plano. Denotamos por* S *a área do paralelogramo formado pelos vetores* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$.

(a) *Definimos* $\vec{u} = (-a_2,a_1)$. *Mostre que* $\|\vec{u}\| = \|\vec{a}\|$ *e* $\vec{u}\cdot\vec{a} = 0$.

(*b*) *Mostre que* $S = \|\vec{a}\| \, \|\text{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})\|$.

(*c*) *Deduza que* $S = |\det(\vec{a}, \vec{b})|$, *onde*

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

é o determinante dos vetores $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$.

(*d*) *Sejam* $A(-1, 1)$, $B(1, -3)$ *e* $C(7, 5)$. *Calcule a área do triângulo* ABC. *Dica: a área do triângulo* ABC *é metade a do paralelogramo formado pelos vetores* $\overrightarrow{AC}$ *e* $\overrightarrow{CD}$.

2.8.32. (*a*) *Calcule a área do paralelogramo* $ABCD$, *onde* $A(2, 1)$, $B(5, 3)$, $C(7, 9)$ *e* $D(4, 7)$,

(*b*) *Calcule a área do triângulo* ABC, *onde* $A(3, -1)$, $B(-1, 2)$ *e* $C(7, 5)$.

2.8.33. *Sejam* $\vec{a} = (2, 0, 3)$, $\vec{b} = (0, 4, 2)$ *e* $\vec{c} = (-1, 2, 5)$. *Calcule as coordenadas dos seguintes vetores:*

$$\vec{a} \times \vec{b}, \quad \vec{a} \times \vec{c}, \quad \vec{b} \times \vec{c}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}, \quad (2\vec{a}) \times (-3\vec{b}), \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}),$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}, \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

O produto vetorial é associativo?

2.8.34. *Sejam* $\vec{a}, \vec{b}$ *e* $\vec{c}$ *três vetores do espaço. Simplifique a seguinte expressão vetorial:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}).$$

2.8.35. *Seja* P *o plano que passa pelos pontos* $A(0, 2, 1)$, $B(0, 1, 0)$ *e* $C(1, 0, 2)$. *Encontre um vetor* $\vec{n}$ *ortogonal ao plano* P.

2.8.36. *Verifique a identidade de Lagrange,*

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2,$$

no caso $\vec{a} = (-1, 2, -4)$ *e* $\vec{b} = (1, -3, 5)$.

2.8.37. *Sejam* $A(2, 1, -2)$, $B(2, 3, 0)$, $C(6, 6, 5)$ *e* $D(6, 4, 3)$. *Verifique que* $ABCD$ *é um paralelogramo e calcule a sua área.*

2.8.38. *Sejam* $A(-1,2,-5)$*,* $B(5,4,0)$ *e* $C(11,8,3)$*.*

(*a*) *Calcule a área do triângulo* ABC*.*

(*b*) *Calcule o comprimento da altura que passa pelo ponto* A*.*

2.8.39. *Sejam* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *dois vetores do espaço. Denotamos por* S_1 *a área do paralelogramo formado pelos vetores* $\vec{a}-\vec{b}$ *e* $\vec{a}+\vec{b}$*, e por* S_2 *a área do paralelogramo formado pelos vetores* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$*. Mostre que* $S_1 = 2S_2$*.*

2.8.40. *Sejam* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$*,* $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *e* $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *três vetores. O determinante de* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$ *e* $\vec{c}$ *é o número real*

$$\begin{aligned} \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) &:= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1). \end{aligned}$$

(*a*) *Mostre que* $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$*. Observação: o número real* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ *é chamado produto misto dos vetores* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$ *e* $\vec{c}$*, e é denotado por* $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$*. Assim,* $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$*.*

(*b*) *Deduza que* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$ *e* $\vec{c}$ *são coplanares se e somente se* $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$*.*

(*c*) *Mostre que* $(3,0,-1)$*,* $(5,1,4)$ *e* $(13,2,7)$ *são coplanares.*

2.8.41.

(*a*) *Decida se o seguintes vetores são coplanares:*

$$(2,3,-1), \quad (1,-1,3), \quad (1,9,-11).$$

(*b*) *Determine todos os números reais* k *tais que os vetores*

$$(2,1,2), \quad (1,k,1), \quad (3,1,k)$$

sejam colineares.

2.8.42.

(*a*) *Decida se os pontos* $A(0,3,-2)$*,* $B(2,3,0)$*,* $C(6,6,5)$ *e* $D(6,4,3)$ *são coplanares.*

(b) *Encontre um ponto* P *do eixo das abscissas que pertence ao plano passando pelos pontos* $A(1,1,1)$, $B(0,-2,3)$ *e* $C(4,1,-1)$.

2.8.43. *Seja* $\mathcal{P}$ *o paralelepípedo de arestas* AB, AD *e* AE. *Aceitamos o seguinte fato: o volume* V *de* $\mathcal{P}$ *é dado pelo valor absoluto do produto misto* $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]$, *isto é,*

$$V = |\,[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]\,|.$$

Calcule o volume do paralelepípedo $ABCDEFGH$, *onde* $A(-1,-1,7)$, $B(-2,1,6)$, $C(0,1,6)$, $D(1,-1,7)$, $E(2,-2,3)$, $F(1,0,2)$, $G(3,0,2)$, $H(4,-2,3)$.

3.5 Exercícios

Em todos os exercícios abaixo, está fixado um sistema de coordenadas cartesianas $\Sigma = \{O, \mathscr{B}\}$, onde $\mathscr{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base ortonormal e positiva. A não ser que seja explicitamente dito, todas as coordenadas são expressadas em relação à Σ e $\mathscr{B}$.

3.5.1. Escreva uma equação da reta r nos casos a seguir:

(a) r passa pelo ponto $P(-2,-1,3)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (2,1,1)$.

(b) r passa pelos pontos $A(1,3,-1)$ e $B(0,2,3)$.

3.5.2. Escreva uma equação do plano α nos casos a seguir:

(a) α passa pelos pontos $A(1,0,2)$ e $B(2,-1,3)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (0,1,2)$;

(b) α passa pelos pontos $A(3,1,-1)$ e $B(1,0,1)$ e é paralelo ao vetor $\overrightarrow{CD}$, sendo $C(1,2,1)$ e $D(0,1,0)$;

(c) α passa pelos pontos $A(1,0,2)$, $B(1,0,3)$ e $C(2,1,3)$.

3.5.3.

(a) Dê uma equação vetorial do plano determinado pelos pontos $A(1,1,0)$, $B(-1,2,1)$ e $C(3,2,1)$.

(b) Dê as equações paramétricas do plano paralelo aos vetores $\vec{u} = (-1,2,1)$ e $\vec{v} = (1,0,3)$ e que passa pelo ponto $P(2,4,-1)$.

(c) Dê uma equação vetorial do plano cujas equações paramétricas são dadas por:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t - h, \\ y = -2 + t + 3h, \qquad t, h \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + 5t, \end{cases}$$

(d) Dê as equações paramétricas do plano paralelo ao vetore $\vec{u} = (5,1,2)$ e que passa pelos pontos $A(3,-1,1)$ e $B(2,-1,0)$.

(e) Dê uma equação geral do plano que passa pelo ponto $P(3,-1,2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (-1,1,2)$ e $\vec{v} = (1,-1,0)$.

3.5.4. Determine un vetor normal ao plano α nos seguintes casos:

(a) $\alpha\,:\,P(x,y,z)=(1,0,1)+t(2,-1,3)+h(1,1,0);\ t,h\in\mathbb{R}.$

(b) $\alpha\,:\,\begin{cases} x=2+3t,\\ y=1+2t-h, \qquad t,h\in\mathbb{R}.\\ z=-t+2h,\end{cases}$

(c) $\alpha\,:\,2x-3y+z-1=0.$

3.5.5. Determine a equação geral do plano β paralelo ao plano $\alpha\,:\,\begin{cases} x=1+h+2t\\ y=2+2h+t\\ z=3t\end{cases}$; $t,h\in\mathbb{R}$, e que

(a) passa pelo ponto $P(3,2,0)$;

(b) passa pela origem.

3.5.6. *Sejam* $A(1,2,-1)$*,* $B(3,2,0)$*,* $C(2,1,-1)$ *e* $D(1,0,4)$*. Seja* π_1 *o plano que passa pelos pontos* O,A,B *e seja* π_2 *o plano que passa pelos pontos* O,C,D*. Determine uma equação vetorial da reta* $r=\pi_1\cap\pi_2$*.*

3.5.7. *Seja* r *a reta cujas equações paramétricas são dadas por*

$$r\,:\,\begin{cases} x= & 2+3t,\\ y= & -t, \qquad , \quad t\in\mathbb{R}.\\ z= & 1+t,\end{cases}$$

Sejam π_1 *e* π_2 *os planos cujas equações paramétricas são respectivamente dadas por:*

$$\pi_1\,:\,\begin{cases} x= & 1+2\lambda+\mu,\\ y= & -1-3\lambda+2\mu,\\ z= & 1+\lambda,\end{cases} \quad \text{e} \quad \pi_1\,:\,\begin{cases} x= & -5-\nu,\\ y= & 3+\nu+3\eta,\\ z= & \nu+\eta,\end{cases} ,$$

onde $t,\lambda,\mu,\nu,\eta\in\mathbb{R}$*. Estude as posições relativas dos pares* (r,π_1)*,* (r,π_2) *e* (π_1,π_2)*.*