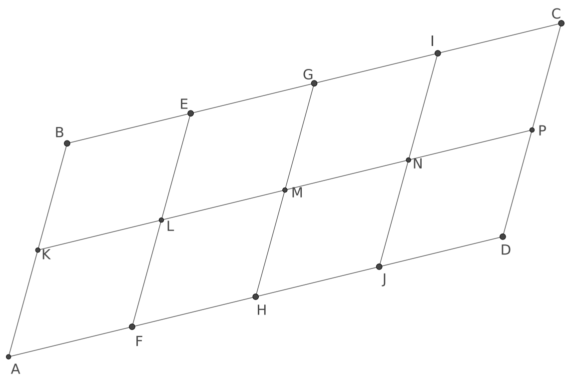
1ª.LISTA DE EXERCÍCIOS – VETORES

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES

Exercício 1. *Sejam A, B, C, D e E, pontos. Prove que:*

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (2) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} \Longrightarrow \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$

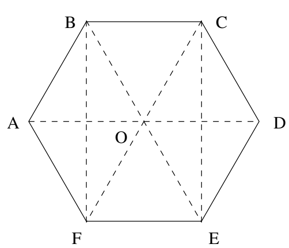


Exercício 2. *Qualquer vetor tem **infinitas** maneiras de ser descrito (ou escrito). Por exemplo, usando somente os pontos da figura ao lado, podemos escrever* $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{EE} = \overrightarrow{FF} = \dots$ *e assim por diante.*
Usando somente os pontos da figura ao lado, escreva os vetores a seguir de todas as maneiras possíveis.

(1) $\overrightarrow{AB}$ (5) $\overrightarrow{DH}$ (9) $\overrightarrow{EH}$
(2) $\overrightarrow{AK}$ (6) $\overrightarrow{MA}$ (10) $\overrightarrow{EP}$
(3) $\overrightarrow{AF}$ (7) $\overrightarrow{NC}$ (11) $\overrightarrow{EN}$
(4) $\overrightarrow{HF}$ (8) $\overrightarrow{LJ}$ (12) $\overrightarrow{JE}$

Exercício 3. *Sejam $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ pontos distintos de uma reta que estejam nesta ordem igualmente espaçados. Sejam $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{GD}$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AI}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CH}$. Determine o que se pede:*

(1) A em função de B e $\overrightarrow{s}$
(2) C em função de E e $\overrightarrow{s}$
(3) H em função de C e $\overrightarrow{s}$
(4) A em função de I e $\overrightarrow{t}$
(5) B em função de C e $\overrightarrow{t}$
(6) $\overrightarrow{AJ}$ em função de $\overrightarrow{t}$
(7) $\overrightarrow{DA}$ em função de $\overrightarrow{u}$
(8) G em função de H e $\overrightarrow{u}$
(9) C em função de A e $\overrightarrow{u}$
(10) $\overrightarrow{DF}$ em função de $\overrightarrow{v}$
(11) D em função de J e $2\overrightarrow{v}$
(12) $\overrightarrow{v}$ em função de $\overrightarrow{u}$



Para as próximas duas questões $ABCDEF$ é um hexágono regular de centro O (como o da figura ao lado).

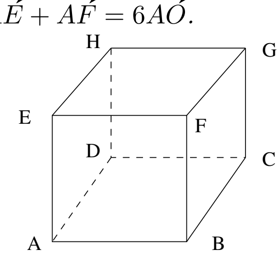
Exercício 4. *Determine o que se pede:*

(1) $A + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DO}$
(2) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$
(3) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{CD}$
(4) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DO}$
(5) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$

Exercício 5. *Prove que* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.

Exercício 6. *Para o cubo da figura ao lado, determine o que se pede:*

(1) $A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
(2) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}$
(3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{BF}$
(4) $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BH}$



Exercício 7. *Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vetores e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Prove que:*

(1) $-(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$. (2) $\lambda(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{v}$. (3) $(\lambda - \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} - \mu\overrightarrow{u}$.

Exercício 8. *Para $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, vetores $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $b \neq 0$ e $c \neq 0$, prove que:*

(1) $\frac{a\overrightarrow{u}}{b} = \frac{a}{b}\overrightarrow{u}$
(2) $\frac{b\overrightarrow{v}}{b} = \overrightarrow{v}$
(3) $\frac{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}{b} = \frac{\overrightarrow{u}}{b} + \frac{\overrightarrow{v}}{b}$
(4) $\frac{\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}}{b} = \frac{\overrightarrow{u}}{b} - \frac{\overrightarrow{v}}{b}$
(5) $\frac{\overrightarrow{v}}{b} + \frac{\overrightarrow{u}}{c} = \frac{c\overrightarrow{v}+b\overrightarrow{u}}{bc}$
(6) $\frac{\overrightarrow{v}}{b} - \frac{\overrightarrow{u}}{c} = \frac{c\overrightarrow{v}-b\overrightarrow{u}}{bc}$

Exercício 9. *Sejam A e B pontos, e $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores. Prove que, se $A + \overrightarrow{u} = B + \overrightarrow{v}$, então $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{v}$.*

Exercício 10. *Determine a relação entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, sabendo que, para um dado ponto A, $(A + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = A$.*

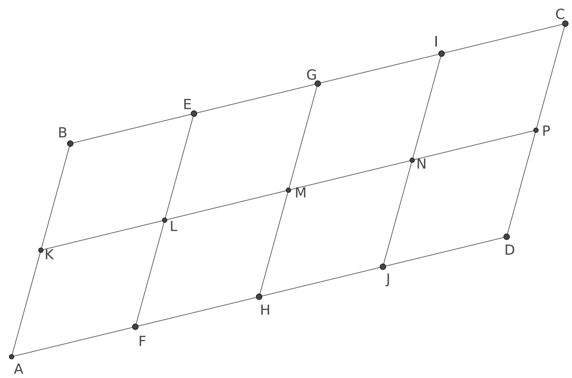
Exercício 11. *Num triângulo $\triangle ABC$, sejam M, N, P os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente. Mostre que $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$.*

Exercício 12. *Sejam A, B e C três pontos quaisquer, com $A \neq B$. Prove que:*

$$X \text{ é um ponto do segmento } AB \iff \overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}, \text{ com } \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0 \text{ e } \alpha + \beta = 1.$$

2ª.LISTA DE EXERCÍCIOS – COORDENADAS AOS VETORES (DE UM PLANO)

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES



Exercício 1. *Determine as coordenadas dos vetores abaixo com relação à base* $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right)$.

(1) $\vec{0}$	*(8)* $\overrightarrow{NC}$	*(15)* $\overrightarrow{MB}$	*(22)* $\overrightarrow{MI}$
(2) $\overrightarrow{AF}$	*(9)* $\overrightarrow{LJ}$	*(16)* $\overrightarrow{MC}$	*(23)* $\overrightarrow{MJ}$
(3) $\overrightarrow{AB}$	*(10)* $\overrightarrow{EH}$	*(17)* $\overrightarrow{MD}$	*(24)* $\overrightarrow{MK}$
(4) $\overrightarrow{AC}$	*(11)* $\overrightarrow{EP}$	*(18)* $\overrightarrow{ME}$	*(25)* $\overrightarrow{ML}$
(5) $\overrightarrow{AK}$	*(12)* $\overrightarrow{EN}$	*(19)* $\overrightarrow{MF}$	*(26)* $\overrightarrow{MM}$
(6) $\overrightarrow{HF}$	*(13)* $\overrightarrow{JE}$	*(20)* $\overrightarrow{MG}$	*(27)* $\overrightarrow{MN}$
(7) $\overrightarrow{DH}$	*(14)* $\overrightarrow{MA}$	*(21)* $\overrightarrow{MH}$	*(28)* $\overrightarrow{MP}$

Exercício 2. *As coordenadas dos vetores abaixo são em relação à mesma base* $\mathcal{B}$ *da questão anterior. Apresente os vetores apenas usando os pontos da figura.*

(1) $(1,1)$ *(3)* $(1,-1)$ *(5)* $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ *(7)* $(-2,1)$ *(9)* $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$ *(11)* $(4,1)$
(2) $(-1,1)$ *(4)* $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ *(6)* $(2,-1)$ *(8)* $(-2,0)$ *(10)* $\left(4,\frac{1}{2}\right)$ *(12)* $\left(-4,\frac{1}{2}\right)$

Exercício 3. *Prove que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.*

Exercício 4. *Prove que o segmento de reta determinado pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado do triângulo e tem metade da medida deste.*

Exercício 5 (Baricentro de Triângulo)**.** *Sejam* ΔABC *um triângulo e* M, N *e* P *os pontos médios dos lados* $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$, *respectivamente. Os segmentos* $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ *são chamados de* ***medianas de*** ΔABC. *Para todo o exercício tome como base* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

(1) Ache as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ e $\overrightarrow{CP}$ *e mostre, usando coordenadas, que* ***não há*** *duas medianas paralelas.*
(2) Seja G *o ponto de encontro das medianas* $\overline{AM}$ *e* $\overline{BN}$ *e determine as coordenadas de* $\overrightarrow{AG}$.
(3) Determine a proporção com a qual G *divide as medianas* $\overline{AM}$ *e* $\overline{BN}$.
(4) Mostre que G *está na mediana* $\overline{CP}$ *e determine a proporção com a qual* G *divide a mediana* $\overline{CP}$.

O ponto G *determinado neste exercício é chamado de* ***baricentro de*** ΔABC.

Exercício 6. *Um trapézio é um quadrilátero que tem dois,* ***e somente dois****, lados paralelos. Os lados paralelos de um trapézio são chamados de bases. Prove que o segmento de reta de extremidades nos pontos médios dos lados não-paralelos de uma trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a média (aritmética) das medidas das bases.*

Exercício 7. *Dados os vetores* $\vec{u} = (-3,4)$ *e* $\vec{v} = (1,2)$, *determinar:*

(1) $3\vec{u}+2\vec{v}$ *(2)* $2\vec{v}-3\vec{u}$ *(3)* $-3\vec{u}$ *(4)* $\frac{1}{5}\vec{u}+\frac{1}{4}\vec{v}$ *(5)* $\frac{-\vec{u}+3\vec{v}}{2}$ *(6)* $\frac{3\vec{u}}{6}$

Exercício 8. *Sejam* $\mathcal{B} = \left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ *e* $\mathcal{C} = \left(\vec{f_1}, \vec{f_2}\right)$ *duas bases para* $\mathbb{V}^2$. *Se* $\vec{f_1} = (a_{11}.a_{21})_{\mathcal{B}}$ *e* $\vec{f_2} = (a_{12}.a_{22})_{\mathcal{B}}$, *determine relação entre as coordenadas de* $\vec{u}$ *com relação às bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$. *Experimente apresentar essa relação de forma matricial.*

Exercício 9. *Ache as coordenadas de* $\overrightarrow{HL}$ *e* $\overrightarrow{HN}$ *com relação à base* $\mathcal{B}$ *(do exercício 1) e mostre que* ***não*** *são paralelos. Determine as coordenadas dos vetores abaixo com relação à base* $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{HL}, \overrightarrow{HN}\right)$.

(1) $\vec{0}$ *(3)* $\overrightarrow{AB}$ *(5)* $\overrightarrow{AK}$ *(7)* $\overrightarrow{DH}$ *(9)* $\overrightarrow{LJ}$ *(11)* $\overrightarrow{EP}$ *(13)* $\overrightarrow{JE}$ *(15)* $\overrightarrow{MB}$ *(17)* $\overrightarrow{MD}$
(2) $\overrightarrow{AF}$ *(4)* $\overrightarrow{AC}$ *(6)* $\overrightarrow{HF}$ *(8)* $\overrightarrow{NC}$ *(10)* $\overrightarrow{EH}$ *(12)* $\overrightarrow{EN}$ *(14)* $\overrightarrow{MA}$ *(16)* $\overrightarrow{MC}$ *(18)* $\overrightarrow{ME}$

Exercício 10. *Sejam* A *e* B *pontos distintos, e tome o ponto* C *está na reta* $\overleftrightarrow{AB}$ *de tal forma que* $\frac{\overrightarrow{AC}}{r} = \frac{\overrightarrow{CB}}{s}$, *para* $r, s \in \mathbb{R}$, *não-nulos . Escreva* $\overrightarrow{AC}$ *e* $\overrightarrow{CB}$ *em função de* $\overrightarrow{AB}$, r *e* s.

Exercício 11. *Um triângulo tem vértices* A, B *e* C. *Prove que* X *é um* ***ponto interior ao*** ΔABC *se, e somente se, existem reais* α *e* β, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *tais que* $\alpha + \beta < 1$ *e* $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$. (**Lembrete:** *Um ponto é dito interior a uma triângulo se, e somente se, é interior a uma segmento que tem uma extremidade em um vértice e a outra extremidade interior ao lado oposto.)*

3ª.LISTA DE EXERCÍCIOS – PRODUTO ESCALAR

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES

Exercício 1. *Dados os vetores* $\vec{u} = (1, -1)$ *e* $\vec{v} = (-3, 4)$, *calcular:*
(1) $\|\vec{u}\|$ *(2)* $\|\vec{v}\|$ *(3)* $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ *(4)* $\|2\vec{u} - \vec{v}\|$

Exercício 2. *Calcular os valores de a para que o vetor* $\vec{u} = (a, -2)$ *tenha módulo 4.*

Exercício 3. *Calcular os valores de a para que o vetor* $\vec{v} = \left(a, \frac{1}{2}\right)$ *seja unitário (i.e., ter norma 1).*

Exercício 4. *Determinar o valor de k para que os vetores* $\vec{u} = (-2, 3)$ *e* $\vec{v} = (k, -4)$ *sejam:*
(1) paralelos *(2) ortogonais*

Exercício 5. *Sejam* $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ *e* $\vec{v} = (1, k)$. *Determinar o valor de k para que:*
(1) $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *sejam paralelos,*
(2) $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *sejam ortogonais, e*
(3) a medida angular entre $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *seja de* $\frac{\pi}{6}$.

Exercício 6. *Determinar o valor de a para que seja de* $\frac{\pi}{4}$ *o ângulo entre* $\vec{u} = (2, 1)$ *e* $\vec{v} = (1, a)$.

Exercício 7. *Determinar o valor de a para que seja de* $\frac{3\pi}{4}$ *o ângulo entre* $\vec{u} = (2, 1)$ *e* $\vec{v} = (1, a)$.

Exercício 8. *Encontrar a projeção ortogonal de* $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u}$, *para os casos:*
(1) $\vec{u} = (1, 1)$ *e* $\vec{v} = (2, 5)$ *(2)* $\vec{u} = (1, 0)$ *e* $\vec{v} = (4, 3)$ *(3)* $\vec{u} = (4, 3)$ *e* $\vec{v} = (1, 2)$

Exercício 9. *Ache o ângulos entre* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *para os casos:*
(1) $\vec{u} = (1, 0)$ *e* $\vec{v} = (1, 1)$ *(2)* $\vec{u} = (1, 0)$ *e* $\vec{v} = (-1, -1)$ *(3)* $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ *e* $\vec{v} = (-1, 0)$

Exercício 10. *Seja* $(\vec{u}, \vec{v})$ *uma base ortogonal. Mostre que para* $\vec{w}$, *vetor,*

$$\vec{w} = \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{w} + \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{w}.$$

Exercício 11. *Sejam* $\vec{u}$ *e* $\vec{v} \neq \vec{0}$, *vetores. Ache fórmula para* $\|\vec{u} - \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\|$ *em função de* $\|\vec{u}\|$ *e* $\mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v})$. *Como ficaria em função de* $\|\vec{v}\|$ *e* $\vec{u} \bullet \vec{v}$*?*

Exercício 12. *Seja* ΔABC *um triângulo e suponha que* $\overrightarrow{AB} = (a, b)$ *e* $\overrightarrow{AC} = (x, y)$. *Determine fórmula para a área de* ΔABC.

Exercício 13 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Sejam* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *vetores. Mostre que:*

$$\left|\vec{u} \bullet \vec{v}\right| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

Mostre ainda, que vale a igualdade se, e somente se, $\vec{u} // \vec{v}$.

Exercício 14. *Sejam* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *vetores. Mostre que:*
(1) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u} \bullet \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$.
(2) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$.
(3) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4(\vec{u} \bullet \vec{v})$.
(4) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

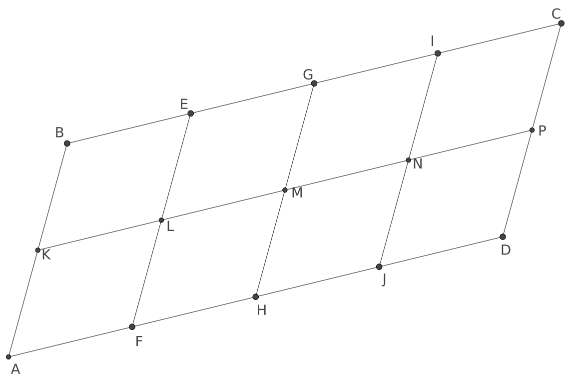
Exercício 15. *Sejam* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *vetores ambos não nulos. Mostre que são equivalentes:*
(1) $\vec{u} // \vec{v}$ *e têm mesmo sentido,* *(2)* $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ *e* *(3)* $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \left|\, \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \,\right|$
Apresente equivalências análogas a estas para o fato de $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *serem paralelos de sentidos contrátrios.*

Exercício 16. *Mostre que um paralelogramo ABCD tem diagonais perpendiculares se, e somente se, é um* ***losango****.*

Exercício 17. *Sejam O, A e B três pontos não-alinhados,* $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ *e* $\vec{b} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. *Mostre que o vetor* $\vec{b}$ *é paralelo à bissetriz do ângulo* $A\hat{O}B$.

4ª.LISTA DE EXERCÍCIOS – COORDENADAS AOS PONTOS

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES



Exercício 1. *Determine as coordenadas de **todos os pontos da figura ao lado** com relação ao sistema* $\Sigma = \left(M, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MG}\right)$.

Exercício 2. *Ainda usando a figura ao lado, determine os pontos de coordenadas dadas abaixo com relação ao sistema* $\Gamma = \left(H, \overrightarrow{HL}, \overrightarrow{HN}\right)$.

(1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	*(6)* $(-1, 1)$	*(11)* $(1, 1)$
(2) $(1, -1)$	*(7)* $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$	*(12)* $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
(3) $(0, 2)$	*(8)* $(2, 0)$	*(13)* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
(4) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$	*(9)* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$	*(14)* $(0, 1)$
(5) $(1, 0)$	*(10)* $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	*(15)* $(0, 0)$

Exercício 3. *Tomando os sistemas* Σ *e* Γ *das questões anteriores, se um ponto* $X = (a, b)_\Sigma = (x, y)_\Gamma$, *determine relação entre* a, b, x *e* y. *Procure apresentar essa relação de maneira matricial.*

Exercício 4. *Dados os pontos* $A = (-2, 3)$, $B = (1, 4)$, $C = (1, 2)$ *e* $D = (4, 3)$, *ache as coordenadas dos vetores* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ *e* $\overrightarrow{DA}$.

Exercício 5. *Prove (vetorialmente!) que os pontos* $A = (2, 1)$, $B = (5, 2)$, $C = (6, 5)$ *e* $D = (3, 4)$ *são vértices de um paralelogramo.*

Exercício 6. *Sendo* $A = (-2, 3)$ *e* $B = (6, -3)$, *extremidades de um segmento, determinar:*

(1) *os pontos* C, D *e* E *que dividem o segmento* AB *em quatro partes de mesmo comprimento;*
(2) *os pontos* F *e* G *que dividem o segmento* AB *em três partes de mesmo comprimento.*

Exercício 7. *Classifique os triângulos abaixo (**eqüilátero**, **isósceles** ou **escaleno**):*

(1) $A = (1, 1)$, $B = (3, 2)$ *e* $C = (0, 3)$
(2) $D = (-1, 1)$, $E = (3, 1)$ *e* $F = (1, 2\sqrt{3} + 1)$
(3) $G = (3, 2\sqrt{3})$, $H = (3, 0)$ *e* $I = (0, -\sqrt{3})$

Exercício 8. *Encontrar* P, *ponto do eixo* Ox, *tal que a sua distância ao ponto* $A = (2, -3)$ *é 5.*

Exercício 9. *Provar que os pontos* $A = (-2, -1)$, $B = (2, 2)$, $C = (-1, 6)$ *e* $D = (-5, 3)$, *nesta ordem, são vértices de um quadrado.*

Exercício 10. *Chamamos de **trapézio** um quadrilátero que tem dois, **e somente dois**, lados paralelos. Um trapézio é chamado de **reto** se tem um ângulo reto. Mostre que* $ABCD$ *é um trapézio reto, onde* $A = (6, 5)$, $B = (11, 5)$, $C = (3, 1)$ *e* $D = (2, 3)$, *num sistema ortonormal.*

Exercício 11. *Determine os ângulos internos dos triângulos da questão 7.*

Exercício 12. *Dados os pontos* $A = (3, -4)$, $B = (-1, 1)$ *e o vetor* $\vec{v} = (-2, 3)$, *calcular:*

(1) $\overrightarrow{AB} + \vec{v}$ *(2)* $\overrightarrow{BA} - \vec{v}$ *(3)* $B + 2\overrightarrow{AB}$ *(4)* $3\vec{v} - 2\overrightarrow{BA}$

Exercício 13. *Encontrar o vértice oposto a* B, *no paralelogramo* $ABCD$, *para:*

(1) $A = (-3, -1)$, $B = (4, 2)$ *e* $C = (5, 5)$ *(2)* $A = (5, 1)$, $B = (7, 3)$ *e* $C = (3, 4)$

Exercício 14. *Determinar a distância entre os pontos* $A = (1, 3)$ *e* $B = (-1, 4)$.

Exercício 15. *Verifique que os pontos* $A = (2, 1)$, $B = (-1, 3)$ *e* $C = (4, -2)$ *formam um triângulo. Determine o perímetro e a área deste o triângulo.*

Exercício 16. *Prove que o triângulo cujos vértices são* $(2, 2)$, $(-4, -6)$ *e* $(4, -12)$ *é retângulo.*

Exercício 17. *Determinar* x *de modo que o triângulo de vértices* $A = (4, 5)$, $B = (1, 1)$ *e* $C = (x, 4)$ *seja retângulo em* B.

Exercício 18. *Dados* $A = (x, 5)$, $B = (-2, 3)$ *e* $C = (4, 1)$, *obter* x *tal que* A *equidiste de* B *e* C.

Exercício 19. *Dados os pontos* $A = (8, 11)$, $B = (-4, -5)$ *e* $C = (-6, 9)$, *obter o circuncentro do triângulo* ABC.

Exercício 20. *Dados os pontos* $M = (a, 0)$ *e* $N = (0, a)$*, determinar* P *de modo que o triângulo* MNP *seja equilátero.*

Exercício 21. *Dados os pontos* $B = (2, 3)$ *e* $C = (-4, 1)$*, determinar o vértice* A *do triângulo* ABC*, sabendo que é o ponto do eixo* y *do qual se vê* $\overline{BC}$ *sob ângulo reto.*

Exercício 22. *Dados* $A = (-2, 4)$ *e* $B = (3, -1)$*, vértices consecutivos de um quadrado, determinar os outros dois vértices.*

Exercício 23. *Calcular o comprimento da mediana* $\overline{AM}$ *do triângulo* ABC *onde* $A = (0, 0)$*,* $B = (3, 7)$ *e* $C = (5, -1)$*.*

Exercício 24. *Dados os vértices consecutivos* $A = (-2, 1)$ *e* $B = (4, 4)$*, de um paralelogramo, e o ponto* $E = (3, -1)$*, intersecção de suas diagonais, determinar os outros dois vértices.*

Exercício 25. *Do triângulo* ABC *são dados: o vértice* $A = (2, 4)$*, o ponto* $M = (1, 2)$ *médio do lado* $\overline{AB}$ *e ponto* $N = (-1, 1)$ *médio do lado* $\overline{BC}$*. Calcular o perímetro deste triângulo.*

Exercício 26. *Se* $M = (2, 1)$*,* $N = (3, 3)$ *e* $P = (6, 2)$ *são os pontos médios dos lados* $\overline{AB}$*,* $\overline{BC}$ *e* $\overline{CA}$*, respectivamente, de um triângulo* ABC*, determinar as coordenadas de* A*,* B *e* C*.*

Exercício 27. *Determine fórmula para as coordenadas do baricentro de um triângulo, sabendo-se as coordenadas dos seus vértices.*

Exercício 28. *O baricentro de um triângulo* ABC *é* $G = (1, 6)$ *e dois dos seus vértices são* $A = (2, 5)$ *e* $B = (4, 7)$*. Determine seu terceiro vértice.*

Exercício 29. *Num triângulo* ABC *são dados:* $A = (2, 0)$*;* $M = (-1, 4)$*, que é ponto médio do lado* $\overline{AB}$*;* $d(A, B) = 10$ *e* $d(B, C) = 10\sqrt{2}$*. Obter os outros vértices de* ΔABC*.*

Exercício 30. *Provar que os pontos médios dos lados do quadrilátero* $ABCD$ *são vértices de um paralelogramo.*

Exercício 31. *O quadrilátero de vértices* $A = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$*,* $B = (\frac{1}{2}, 2)$*,* $C = (2, -\frac{3}{2})$ *e* $D = (0, -\frac{5}{2})$ *é um paralelogramo? Justifique sua resposta.*

Exercício 32. *Defina "simetria em relação a um ponto". Sejam* $C = (a, b)$ *e* $P = (\alpha, \beta)$ *pontos. Determine* Q*, ponto, que é simétrico a* P *com relação a* C*.*

Exercício 33. *Mostre que a área do triângulo determinado pelos pontos* (x_1, y_1)*,* (x_2, y_2) *e* (x_3, y_3) *é* $\frac{|D|}{2}$*, onde*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Exercício 34. *O losango* $ABCD$ *tem diagonal* $\overline{DB}$ *paralela ao vetor* $\vec{v} = (1, 2)$*. Se* $A = (-1, 2)$ *e* $B = (3, 5)$*, determine os outros vértices de* $ABCD$*.*

Exercício 35. *Um trapézio é dito isósceles quando os seus lados* **não** *paralelos são congruentes. O trapézio isósceles* $ABCD$ *tem lados* $\overline{AB}$*,* $\overline{BC}$*,* $\overline{CD}$ *e* $\overline{AD}$*, onde* $\overline{AD}$ *é paralelo ao lado* $\overline{BC}$*. Se* $A = (0, 0)$*,* $B = (0, 2)$ *e* $C = (2, 3)$*, determine o vértice* D*.*

Exercício 36. *Os pontos* $(1, 3)$*,* $(2, 5)$ *e* $(49, 100)$ *são colineares?*

Exercício 37. *Determinar* y *para que os pontos* $(3, 5)$*,* $(-3, 8)$ *e* $(4, y)$ *sejam colineares.*

Exercício 38. *Mostrar que* $A = (a, 2a + 1)$*,* $B = (a + 1, 2a + 1)$ *e* $C = (a + 2, 2a + 5)$ *são colineares para todo valor de* $a \in \mathbb{R}$*.*

Exercício 39. *Se* $A = (0, a)$*,* $B = (a, -4)$ *e* $C = (1, 2)$*, para quais valores de* a *existe o triângulo* ABC*?*

5^a.LISTA DE EXERCÍCIOS – RETAS

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES

Exercício 1. *Determinar o ponto P, pertencente ao eixo das abscissas, sabendo que é equidistante de $B = (1, 3)$ e $C = (-3, 5)$.*

Exercício 2. *Determinar o ponto P, da bissetriz dos quadrantes pares, que equidista de $A = (8, -8)$ e $B = (12, -2)$.*

Exercício 3. *(1) Dados $A = (1, 1)$ e $B = (10, -2)$, obter o ponto no qual $\overleftrightarrow{AB}$ encontra o eixo Ox.*
(2) Dados $A = (3, 1)$ e $B = (5, 5)$, obter o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta o eixo Oy.
(3) Dados $A = (2, -3)$ e $B = (8, 1)$, obter o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta a bissetriz dos quadrantes ímpares.
(4) Dados $A = (2, 4)$ e $B = (-4, 2)$, obter o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta a bissetriz dos quadrantes pares.

Exercício 4. *Dados $A = (-3, 4), B = (2, 9), C = (2, 7)$ e $D = (4, 5)$, obtenha $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$.*

Exercício 5. *Determinar $P = (a, b)$ colinear simultaneamente com $A = (-1, -2)$ e $B = (2, 1)$ e com $C = (-2, 1)$ e $D = (1, -4)$.*

Exercício 6. *Ache P da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $d(A, P) = 5$, para $A = (0, -25)$ e $B = (-2, -11)$.*

Exercício 7. *Determinar na reta $\overleftrightarrow{AB}$ os pontos equidistantes dos eixos cartesianos, para $A = (-1, 5)$ e $B = (4, -2)$.*

Exercício 8. *Determinar as equações das retas suportes dos lados do triângulo cujos vértices são $A = (0, 0)$, $B = (1, 3)$ e $C = (4, 0)$.*

Exercício 9. *Determinar a equação geral da reta definida por $(\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$ e $(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2})$.*

Exercício 10. *Uma reta passa por $A = (p, q)$, $B = (3, -2)$ e $(0, 0)$. Qual a relação entre p e q?*

Exercício 11. *Prove que os pontos $A = (a, b + c)$, $B = (b, a + c)$ e $C = (c, a + b)$ são colineares e determinar a equação geral da reta que os contem.*

Exercício 12. *Dados $A = (-5, -5)$, $B = (1, 5)$, $C = (19, 0)$ $r\colon 5x - 3y = 0$, pergunta-se: r passa pelo baricentro do triângulo ABC?*

Exercício 13. *Determinar a intersecção das retas $x + 2y = 3$ e $2x + 3y = 5$.*

Exercício 14. *As retas suportes dos lados de um triângulo são $3x - 4y = 0$, $x + y - 7 = 0$ e $4x - 3y = 0$. Mostrar que esse triângulo é isósceles.*

Exercício 15. *Prove que as retas $2x + 3y - 1 = 0$, $x + y = 0$ e $3x + 4y - 1 = 0$ concorrem no mesmo ponto.*

Exercício 16. *Demonstre que as retas $x - 2y = 0$, $x + 2y - 8 = 0$ e $(1 + k)x + 2(1 - k)y - 8 = 0$ são concorrentes no mesmo ponto para qualquer $k \in \mathbb{R}$.*

Exercício 17. *Determinar a para que as retas $x + 2y - 2a = 0$, $ax - y - 3 = 0$ e $2x - 2y - a = 0$ sejam concorrentes no mesmo ponto.*

Exercício 18. *Demonstrar que as retas $2x + 3y = 0$, $(2k + 1)x + (3k - 2)y + 5 = 0$ e $x - 2y + 5 = 0$ são concorrentes no mesmo ponto, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.*

Exercício 19. *Determinar m de modo que $3x + y - m = 0$, $3x - y + 1 = 0$ e $5x - y - 1 = 0$ delimitem um triângulo.*

Exercício 20. *Qual é a equação da reta que passa por $P = (3, 1)$, intercepta $r\colon 3x - y = 0$ em A, intercepta $s\colon x + 5y = 0$ em B, de modo que P é ponto médio de $\overline{AB}$.*

Exercício 21. *Dado o ponto $A = (1, 2)$, determine as coordenadas de dois pontos P e Q situados respectivamente em $y = x$ e $y = 4x$, de tal modo que A seja o ponto médio de segmentos $\overline{PQ}$.*

Exercício 22. *Determinar o perímetro do triângulo ABC que verifica as seguintes condições: A pertence ao eixo x; B pertence ao eixo Y; a reta $\overleftrightarrow{BC}$ tem equação $x-y=0$; e a reta $\overleftrightarrow{AC}$ tem equação $x+2y-3=0$.*

Exercício 23. *Num triângulo ABC sabe-se que: A pertence ao eixo das abscissas; B pertence à bissetriz $y=x$; $x+y+5=0$ é equação da reta $\overleftrightarrow{AC}$; e $2x-y-2=0$ é equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$.*

Exercício 24. *Determinar α de modo que $P=(3,\alpha)$ seja ponto do interior do triângulo definido pelas retas $2x-y=0$, $x+y=0$ e $7x+y-36=0$.*

Exercício 25. *Determinar a posição relativa das seguintes retas, tomadas duas a duas:*

(1) $r\colon 2x-y+3=0$	(3) $t\colon 3x-6y=-3$	(5) $v\colon 2x+4y+3=0$
(2) $s\colon 2x-y+5=0$	(4) $u\colon x-y+3=0$	(6) $w\colon 4x-2y=-6$

Exercício 26. *Discutir a posição relativa entre r e s, para:*

(1) $r\colon (m-1)x+my-1=0$ e $s\colon (1-m)x+(m+1)y+1=0$.
(2) $r\colon mx+y-p=0$ e $s\colon 3x+3y-7=0$.

Exercício 27. *Achar a distância da reta* $r\colon \begin{cases} x=-2+3t \\ y=-7+2t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, *à origem.*

Exercício 28. *Calcular a distância P à reta r nos seguintes casos:*

(1) $P=(-3,-1)$ e $r\colon 3x-4y+8=0$
(2) $P=(3,2)$ e $r\colon 5x-5y+2=0$
(3) $P=(1,-2)$ e $r\colon \frac{x}{12}+\frac{y}{5}=1$
(4) $P=(-2,3)$ e $r\colon \begin{cases} x=7t-1 \\ y=24t+1 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$
(5) $P=(-1,-2)$ e $r\colon \cos\frac{\pi}{3}\cdot x+\sin\frac{\pi}{3}\cdot y=5$

Exercício 29. *Calcular o comprimento da altura $\overline{AH}$ do triângulo $A=(-3,0)$, $B=(0,0)$ e $C=(6,8)$. Determine as coordenadas do ponto H.*

Exercício 30. *O trapézio de vértices $A=(0,0)$, $B=(7,1)$, $C=(6,5)$ e $D=(-8,3)$ tem qual altura?*

Exercício 31. *O ponto $P=(2,-5)$ é um vértice de um quadrado que tem um dos seus lados não adjacentes a P sobre a reta $x-2y-7=0$. Qual a área do quadrado?*

Exercício 32. *Calcular a distância entre as retas $3x+4y-13=0$ e $3x+4y+7=0$.*

Exercício 33. *Calcular a distância entre as retas $ax+by+c=0$ e $ax+by+d=0$.*

Exercício 34. *Determinar os pontos da reta $y=2x$ que estão à distância 2 da reta $4x+3y=0$.*

Exercício 35. *Determinar as equações da(s) reta(s) que forma(m) ângulo de medida $\frac{\pi}{4}$ com o eixo x e estão à distância $\sqrt{2}$ do ponto $P=(3,4)$.*

Exercício 36. *Obter uma reta paralela a $r\colon x+y+6=0$ e distante $\sqrt{2}$ do ponto $C=(1,1)$.*

Exercício 37. *Determinar as equações das perpendiculares à reta $r\colon 7x-24y+1=0$, as quais estão à distância 3 do ponto $P=(1,0)$.*

Exercício 38 (Pesquise!)**.** *Defina "simetria com relação a uma reta". Sejam $P=(\alpha,\beta)$ e $r\colon Ax+By+C=0$. Mostre que $Q=\left(\alpha-\frac{2A(A\alpha+B\beta+C)}{A^2+B^2},\beta-\frac{2B(A\alpha+B\beta+C)}{A^2+B^2}\right)$ é o ponto simétrico a P com relação à reta r.*

Exercício 39. *Determine o ponto simétrico de (α,β) com relação às retas:*

(1) $x=0$ (2) $y=0$ (3) $x-y=0$ (4) $x+y=0$ (5) $x-y=1$ (6) $y=2x+1$

Exercício 40. *Nas mesmas condições do exercício 38 determine fórmula para o ponto de r mais próximo de P.*

Exercício 41. *Sejam $A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$ dois pontos distintos. Mostre que os pontos que equidistam de A e B determinam uma reta – denominada **mediatriz do segmento** $\overline{AB}$. Determine características da mediatriz do segemento $\overline{AB}$ em função de A e B.*

Exercício 42. *Sejam $r\colon ax+by+c=0$ e $s\colon mx+ny+p=0$ retas. Determine condições sobre a,b,c,m,n,p para que r e s sejam concorrentes. Determine fórmula para a medida do **menor** ângulo formado pelas duas retas. Perguntam-se: c e p são fundamentais? Se c e p mudam, o quê de fato acontece quanto ao fato de serem concorrentes? E quanto à medida do ângulo formado entre as retas? E quanto à medida do **maior** ângulo entre r e s?*

6^{a}.LISTA DE EXERCÍCIOS – PARÁBOLAS

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES

Exercício 1. *Determinar o vértice, o foco e uma equação da diretriz de cada uma das* ***parábolas****:*

(1) $x^2+4x+8y+12=0$	*(5)* $x^2-12y+72=0$	*(9)* $y=x^2+4x+6$
(2) $x^2-2x-20y-39=0$	*(6)* $y=4x-x^2$	*(10)* $y=x^2-4x+2$
(3) $y^2+4y-16x-44=0$	*(7)* $-8x+y^2-6y+17=0$	*(11)* $x=y^2-6y+8$
(4) $y=\frac{x^2}{4}-2x-1$	*(8)* $y-x^2+6x=9$	*(12)* $x=y^2+y+1$

Exercício 2. *Em cada um dos itens, determine uma equação da parábola a partir dos elementos dados:*

(1) foco $F=(3,4)$ *e diretriz* $d\colon x-1=0$,
(2) foco $F=(-1,1)$ *e vértice* $V=(0,0)$,
(3) vértice $V=(1,2)$, *eixo focal paralelo ao eixo das abscissas e* $P=(-1,6)$ *é ponto da parábola,*
(4) eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas e os pontos $P=(0,0)$, $Q=(1,-3)$ *e* $R=(-4,-8)$ *pertencem à parábola,*
(5) eixo focal $f\colon y-5=0$, *diretriz* $d\colon x-3=0$ *e vértice sobre a reta* $r\colon y=2x+3$,
(6) vértice $V=(1,1)$ *e* $F=(0,2)$,
(7) eixo focal é o eixo das ordenadas e o ponto $L=(2,2)$ *é uma das extremidades do* ***latus rectum***,
(8) foco $F=(-2,3)$ *e diretriz* $d\colon x+6=0$.

Exercício 3. *Tome a parábola de equação* $4py=x^2$, *onde* $p\neq 0$.
(1) Determine condição para (x_1,y_1) *e* (x_2,y_2) *estarem na parábola e estejam alinhados com seu foco.*
(2) Determine fórmula para o comprimento do latus rectum desta parábola.

Exercício 4. *Determine o comprimento da corda focal da parábola* $x^2+8y=0$ *que é paralela à reta* $r\colon 3x+4y-7=0$.

Exercício 5. *Se* $F=\left(2,\frac{5}{2}\right)$ *e* $V=(2,1)$ *são o* ***foco*** *e o* ***vértice*** *de uma parábola* Γ. *Determine equação geral da reta diretriz de* Γ, *equação para* Γ *e o ponto de* Γ *alinhado com o foco e* $(8,7)$.

Exercício 6. *Identifique as cônicas de equações e, no caso das parábolas, explicite o foco e a diretriz:*

(1) $x^2-6x-5y+14=0$	*(5)* $16x^2-24xy+9y^2-85x-30y+175=0$
(2) $4y^2-48x-20y-71=0$	*(6)* $7x^2+28xy+28y^2-2x-4y-1=0$
(3) $y^2-2xy+x^2+16x+16y=0$	*(7)* $4x^2-4xy+y^2-8\sqrt{5}x-16\sqrt{5}y=0$
(4) $3x^2+12xy+12y^2-2x-4y-9=0$	*(8)* $x^2-6xy+9y^2-4x+12y+4=0$

Exercício 7. *Determine condição sobre* $k\in\mathbb{R}$ *tal que a cônica dada por* $x^2-6xy+9y^2-4x+12y+k=0$ ***não seja vazia***.

Exercício 8. *Seja a parábola* $\Gamma\colon 4py=x^2$ *e tomemos* $X_0=(x_0,y_0)\in\Gamma$. *Mostre que:*

(1) X_0 *está na reta* $r\colon 2p(y+y_0)=x_0x$,
(2) r *é paralela ao vetor* $\overrightarrow{v_0}=(2p,x_0)$ *e determine equação vetorial para* r, *e*
(3) r *encontra* Γ *somente no ponto* X_0.

Exercício 9. *Determine as retas tangente e normal à parábola* Γ *no ponto* P *para os casos:*

(1) $\Gamma\colon x^2+4x+8y+12=0$ *e* $P=\left(0,-\frac{3}{2}\right)$
(2) $\Gamma\colon x^2-2x-20y-39=0$ *e* $P=\left(3,-\frac{9}{5}\right)$
(3) $\Gamma\colon y^2+4y-16x-44=0$ *e* $P=(-3,-2)$
(4) $\Gamma\colon 4x^2-4xy+y^2-8\sqrt{5}x-16\sqrt{5}y=0$ *e* $P=(0,0)$
(5) $\Gamma\colon x^2-8xy+16y^2-4x+10y+4=0$ *e* $P=\left(\frac{13}{8},\frac{3}{32}\right)$
(6) $\Gamma\colon y=4x-x^2$ *e* $P=(4,0)$

Exercício 10. *Determine o que se pede nos casos:*

(1) a reta tangente a $\Gamma\colon x^2+4x+8y+12=0$ *que é paralela a* $r\colon 3x+4y=0$
(2) a reta tangente a $\Gamma\colon x^2-2x-20y-39=0$ *que é paralela* $r\colon x+y=0$
(3) a reta normal a $\Gamma\colon y^2+4y-16x-44=0$ *que é paralela a* $r\colon y+x=5$
(4) a reta tangente a $\Gamma\colon 4x^2-4xy+y^2-8\sqrt{5}x-16\sqrt{5}y=0$ *que é ortongonal ao eixo* x
(5) a reta normal a $\Gamma\colon y^2-8xy+16x^2-4x+10y+4=0$ *é ortogonal a* $r\colon x=\frac{1}{48}$

Exercício 11. *Determine as retas tangente à parábola* $\Gamma\colon x^2-2xy+y^2-4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y=0$, *que passam pelo ponto* $P=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7ª.LISTA DE EXERCÍCIOS – ELIPSES E HIPÉRBOLES

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES

Exercício 1. *Determinar os focos, o centro e os tamanhos dos eixos de cada uma das* ***elipses*** *abaixo:*

(1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$
(2) $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$
(3) $4x^2 + y^2 = 1$
(4) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$
(5) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$
(6) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

Exercício 2. *Toda elipse admite duas cordas focais de comprimento mínimo e cada uma delas é chamada de* ***latus rectum****. Determine fórmula para o comprimento de um latus rectum de* $\mathbf{E}\colon \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ *(com* $a > b > 0$*).*

Exercício 3. *Em cada item, determine uma equação da elipse a partir dos elementos dados:*
(1) *focos* $F_1 = (3, 8)$ *e* $F_2 = (3, 2)$ *e comprimento do eixo maior 10,*
(2) *vértices* $V_1 = (5, -1)$ *e* $V_2 = (-3, -1)$ *e excentricidade* $e = \frac{3}{4}$,
(3) *centro* $C = (-1, -1)$, *vértice* $V = (5, -1)$ *e excentricidade* $e = \frac{2}{3}$,
(4) *centro* $C = (1, 2)$, *foco* $F = (6, 2)$ *e* $P = (4, 6)$ *é um ponto da elipse,*
(5) *focos* $F_1 = (-4, -2)$ *e* $F_2 = (-4, -6)$ *e latus rectum de medida 6,*
(6) *vértice* $V = (3, -3)$ *e eixo menor de extremos* $B_1 = (2, 2)$ *e* $B_2 = (-2, -2)$,
(7) *centro em* $r\colon y = 2$, *foco* $F = (3, 4)$, *excentricidade* $e = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ *e com eixos paralelos aos eixos coordenados.*

Exercício 4. *Um ponto* $P = (x, y)$ *se desloca no plano de modo que a soma das distâncias aos pontos* $A = (3, 1)$ *e* $B = (-5, 1)$ *é 10. Diga qual curva é descrita por* P *e em seguida determina equação para essa curva.*

Exercício 5. *Determine os comprimentos dos raios focais do ponto* $P = \left(3, \frac{7}{4}\right)$ *sobre a elipse* $7x^2 + 16y^2 = 112$.

Exercício 6. *Determine uma equação da cônica com centro na reta* $r\colon x - 3 = 0$, *eixo focal paralelo ao eixo das abscissas, vértice* $V = (7, 0)$ *e excentricidade* $e = \frac{1}{2}$.

Exercício 7. *Sabemos que a* ***circunferência*** *de centro* C *e raio* $r > 0$ *é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam* r *de* C. *Se* $C = (h, k)$ *e* $r > 0$, *determine equação para a circunferência de centro* C *e raio* r. *Determine condições para que* $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ *seja equação de uma circunferência.*

Exercício 8. *Sejam* $A = (a, b)$ *e* $B = (c, d)$, *distintos. Determine equação para os pontos* X *do plano que satisfazem* $\overrightarrow{XA} \perp \overrightarrow{XB}$. *Que curva é essa?*

Exercício 9. *Um segmento* AB *de medida 12, desloca-se de modo que* A *percorre o eixo das abscissas e* B *o das ordenadas. O ponto* $P = (x, y)$ *é interior ao segmento* AB *e fica situado a 8 de* A. *Estabeleça equação do lugar geométrico descrito pelo ponto* P.

Exercício 10. *Uma matemática aceitou um cargo numa nova Universidade situada a 6km da margem retilínea de um rio. A professora deseja construir uma casa que esteja a uma distância à Universidade igual à metade da distância até a margem do rio. Os possíveis locais satisfazendo esta condição pertencem a uma curva. Determine esta curva e sua equação em relação a algum sistema (cartesiano) à sua escolha.*

Exercício 11 (valor: 2.5)**.** *Determine os extremos das* ***duas*** *cordas focais da elipse* $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, *que são paralelas à reta* $x + y = 1$. *Mostre que os pontos médios dessas cordas e o centro de* $\mathbb{E}$ *estão alinhados.*

Exercício 12. *Determinar os vértices, os focos e o centro de cada uma das* ***hipérboles*** *abaixo:*

(1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$
(2) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$
(3) $x^2 - 9y^2 = 1$
(4) $y^2 - x^2 = 2$
(5) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$
(6) $x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 31 = 0$
(7) $25x^2 - 4y^2 + 40y = 0$
(8) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$

Exercício 13. *Em cada um dos seguintes itens, determine uma equação da hipérbole a partir dos elementos dados:*

(1) focos $F_1 = (-1, 3)$ e $F_2 = (-7, 3)$ e comprimento do eixo transverso igual a 4,
(2) vértice $V_1 = (5, 4)$ e $V_2 = (1, 4)$ e comprimento do latus rectum igual a 5,
(3) focos $F_1 = (2, 13)$ e $F_2 = (2, -13)$ e comprimento do eixo conjugado igual a 24,
(4) centro $C = (0, 0)$, um dos focos $F = (4, 4)$ e um dos vértices $V = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$,
(5) assintotas $r\colon 4x + y - 11 = 0$ e $s\colon 4x - y - 13 = 0$ e um dos vértices $V = (3, 1)$,
(6) um dos focos $F = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, eixo normal $y = -x$ e excentricidade $e = \frac{3}{2}$,
(7) eixo normal $y = 2$, uma das assíntotas $r\colon 2x - y - 4 = 0$ e latus rectum de comprimento 3,
(8) focos $F_1 = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ e $F_2 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e parâmetro $2\sqrt{2}$.

Exercício 14. *Determine uma equação da elipse, com excentricidade $e = \frac{1}{3}$ e cujos focos coincidem com os vértices da hipérbole $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$*

Exercício 15. *Determine uma equação de hipérbole equilátera de focos $F_1 = (1, 6)$ e $F_2 = (1, -2)$.*

Exercício 16. *Encontre o comprimento da(s) corda(s) focal(is) à cônica $\mathbb{H}\colon \frac{(x-1)^2}{2} - y^2 = 1$, que é(são) paralela(s) à reta $x + y = 0$.*

Exercício 17. *Determine os extremos das* ***duas*** *cordas focais da hipérbole $\mathbb{H}\colon x^2 - y^2 = 1$, que são paralelas à reta $\left(\sqrt{2}\right)x - y = 0$. Mostre que os pontos médios dessas cordas e o centro de $\mathbb{H}$ estão alinhados.*

Exercício 18. *As assíntotas de uma hipérbole $\mathbb{H}$ são perpendiculares e uma delas é paralela à reta $r\colon x + y = 0$. Sabendo que $\mathbb{H}$ tem eixo focal horizontal e centro $C = (1, -2)$, determine equação de $\mathbb{H}$.*

Exercício 19. *Identifique as cônicas de equações dadas, apresentando os elementos e os parâmetros que a definem:*

(1) $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$	***(elipse)***
(2) $(x + 1)(y - 2) = 1$	***(hipérbole)***
(3) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$	***(parábola)***
(4) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$	***(duas retas paralelas)***
(5) $2x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 6y + 5 = 0$	***(vazia)***
(6) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$	***(elipse)***
(7) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$	***(duas retas concorrentes)***
(8) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 1 = 0$	***(duas retas paralelas)***
(9) $5x^2 + 2y^2 + 2xy + 2 = 0$	***(vazia)***
(10) $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$	***(hipérbole)***
(11) $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$	***(elipse)***
(12) $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$	***(hipérbole)***

Exercício 20. *Da hipérbole $\mathbb{H}\colon y = \frac{1}{x} - \frac{3x}{4}$, determine seus focos, suas retas assíntotas e as retas tagentes aos seus vértices.*

Exercício 21. *Determine os extremos da corda focal da parábola $\Gamma\colon x^2 + 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y = 0$, que é paralela à reta $r\colon x = 7y$.*

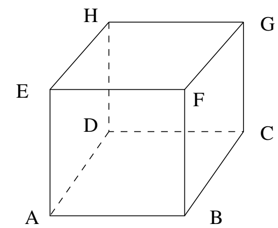
Exercício 22. *Seja a elipse $\mathbf{E}\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e tomemos $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbf{E}$. Mostre que:*
(1) X_0 está na reta $r\colon \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$,
(2) r é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_0} = \left(\frac{y_0}{b^2}, -\frac{x_0}{a^2}\right)$ e determine equação vetorial para r, e
(3) r encontra $\mathbf{E}$ somente no ponto X_0.

Exercício 23. *Seja a hipérbole $\mathbf{H}\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e tomemos $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbf{H}$. Mostre que:*
(1) X_0 está na reta $r\colon \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$,
(2) r é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_0} = \left(\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2}\right)$ e determine equação vetorial para r, e
(3) r encontra $\mathbf{H}$ somente no ponto X_0.

Exercício 24. *Obtenha, em cada caso, equação da reta que contem o ponto P e é tangentee à cônica:*
(1) $2x^2 + 6xy + 2y^2 + 6x - 6y - 27 = 0$ *e* $P = \left(\frac{6-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-6+9\sqrt{2}}{2}\right)$
(2) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ *e* $P = (1, 0)$
(3) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 125x + 100 = 0$ *e* $P = (-1, -3)$
(4) $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 32 = 0$ *e* $P = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$

8ª.LISTA DE EXERCÍCIOS – VETORES DO ESPAÇO

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES



Exercício 1. *Para o cubo da figura ao lado, considerando como base* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, *determine as coordenadas dos vetores a seguir:*

(1) $\vec{0}$ *(2)* $\overrightarrow{AB}$ *(3)* $\overrightarrow{AC}$ *(4)* $\overrightarrow{AD}$
(5) $\overrightarrow{AE}$ *(6)* $\overrightarrow{CD}$ *(7)* $\overrightarrow{AF}$ *(8)* $\overrightarrow{DH}$
(9) $\overrightarrow{GH}$ *(10)* $\overrightarrow{AH}$ *(11)* $\overrightarrow{BH}$ *(12)* $\overrightarrow{GE}$
(13) $\overrightarrow{GA}$ *(14)* $\overrightarrow{EC}$ *(15)* $\overrightarrow{HC}$

Exercício 2. *Sendo* $\vec{u} = (1, -2, 4)$, $\vec{v} = (0, 2, 5)$ *e* $\vec{w} = (1, 1, -2)$, *ache as coordenadas de:*

(1) $\vec{u} + \vec{v}$ *(2)* $-\vec{u} + 2\vec{v}$ *(3)* $2\vec{v} + 3\vec{w}$ *(4)* $\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$ *(5)* $-\frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{4}\vec{u}$

Exercício 3. *Verifique se* $\vec{u}$ *pode ser escrito em função de* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$, *para* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *do exercício anterior.*

Exercício 4. *Ache* m *de modo que* $(1, 2, 2)$, $(m - 1, 1, m - 2)$ *e* $(m + 1, m - 1, 2)$ *sejam coplanares.*

Exercício 5. $(1, -1, 3)$ *pode ser escrito em função de* $(-1, 1, 0)$ *e* $(2, 3, \frac{1}{3})$*?*

Exercício 6. *Ache* m *para que* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *sejam paralelos:*

(1) $\vec{u} = (m, 1, m)$ *e* $\vec{v} = (1, m, 1)$ *(2)* $\vec{u} = (1 - m^2, 1 - m, 0)$ *e* $\vec{v} = (m, m, m)$

Exercício 7. *Ache* m *para que* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *sejam coplanares:*

(1) $\vec{u} = (m, 1, m + 1)$, $\vec{v} = (1, 2, m)$ *e* $\vec{w} = (1, 1, 1)$
(2) $\vec{u} = (m, 1, m + 1)$, $\vec{v} = (0, 1, m)$ *e* $\vec{w} = (0, m, 2m)$

Exercício 8. *Sejam* $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *base e* $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ *e* $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$, *decida se* $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ *é base.*

Exercício 9. *Usando* E *e* F *do exercício anterior, ache as coordenadas em relação à base* F *de:*

(1) $(1, 1, 1)_E$ *(2)* $(1, -1, \frac{1}{2})_E$ *(3)* $(\alpha, \beta, \gamma)_E$ *(4)* $(2, 4, -4)_E$

Exercício 10. *Conforme o exercício 8, ache as coordenadas dos vetores abaixo em relação à base* E*:*

(1) $(0, 0, -1)_F$ *(2)* $(-1, 2, 0)_F$ *(3)* $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{2}{3})_F$

Exercício 11. *Mostre que* $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{AE}\right)$ *é base. Ache as coordenadas dos mesmos vetores da questão 1 com relação à base* $\mathcal{C}$.

Exercício 12. *Sejam* $OABC$ *um tetraedro, e* G *o baricentro (encontro das três medianas de uma triângulo) da face* ABC.

(1) Explique por que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ *é uma base.*
(2) Pesquise como escrevemos $\overrightarrow{AG}$ *em função de* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$ (***FEITO EM AULA***)*, e calcule as coordenadas de* $\overrightarrow{OG}$ *nesta base.*

Exercício 13. *Determine* x *de modo que* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *sejam ortogonais.*

(1) $\vec{u} = (x, 0, 3)$ *e* $\vec{v} = (1, x, 3)$ *(3)* $\vec{u} = (x + 1, 1, 2)$ *e* $\vec{v} = (x - 1, -1, -2)$
(2) $\vec{u} = (x, x, 4)$ *e* $\vec{v} = (4, x, 1)$ *(4)* $\vec{u} = (x, -1, 4)$ *e* $\vec{v} = (x, -3, 1)$

Exercício 14. *Determine* $\vec{u}$ *ortogonal a* $(-3, 0, 1)$ *tal que* $\vec{u} \bullet (1, 4, 5) = 24$ *e* $\vec{u} \bullet (-1, 1, 0) = 1$.

Exercício 15. *Obtenha* $\vec{u}$ *ortogonal a* $(1, 1, 0)$ *tal que* $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ *e* $\operatorname{ang}\big(\vec{u}, (1, -1, 0)\big) = \frac{\pi}{4}$.

Exercício 16. *Sendo* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *unitários,* $\|w\| = 4$, $\vec{u} \bullet \vec{w} = -2$, $\vec{v} \bullet \vec{w} = -4$ *e* $\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$, *calcule:*

(1) $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \bullet \vec{u}$ *(3)* $(2\vec{w} - \vec{v} + \vec{u})(-\vec{u} + 2\vec{w} + \vec{v})$
(2) $(5\vec{u} - \vec{w})(\vec{w} - 2\vec{u})$ *(4)* $(\vec{w} - \vec{v} + \vec{u}) \bullet (-\vec{u} + 2\vec{w} + \vec{v})$

Exercício 17. *Dada a base ortonormal* $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, *sejam* $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ *e* $\vec{v} = 3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}$.

(1) Obtenha a projeção ortogonal de $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u}$.
(2) Determine $\vec{p}$ *e* $\vec{q}$ *tais que* $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$, *sendo* $\vec{p}$ *paralelo a* $\vec{u}$ *e* $\vec{q}$ *ortogonal a* $\vec{u}$.

Exercício 18. *Calcule a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ em cada caso.*

(1) $\vec{v} = (1,-1,2)$ *e* $\vec{u} = (3,-1,1)$
(2) $\vec{v} = (1,3,5)$ *e* $\vec{u} = (-3,1,0)$
(3) $\vec{v} = (-1,1,1)$ *e* $\vec{u} = (-2,1,2)$
(4) $\vec{v} = (1,2,4)$ *e* $\vec{u} = (-2,-4,-8)$

Exercício 19. *Determine:*

(1) $(1,2,3) \wedge (3,1,2)$
(2) $(1,2,3) \wedge (2,4,6)$
(3) $(3,1,2) \wedge (2,4,6)$
(4) $(-1,1,2) \wedge (-1,1,2)$
(5) $(0,4,2) \wedge (1,3,2)$
(6) $(1,2,5) \wedge (2,0,-1)$
(7) $(6,-2,-4) \wedge (-1,-2,1)$
(8) $(7,0,-5) \wedge (1,2,-1)$
(9) $(1,-3,1) \wedge (1,1,4)$

Exercício 20. *Calcule* $\left(\sqrt{2}\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath} + \vec{k}\right) \wedge \left(-\sqrt{6}\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \sqrt{3}\vec{k}\right)$.

Exercício 21. *Para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, mostre que* $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge (\gamma\vec{u} + \delta\vec{v}) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Exercício 22. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores **l.i.**. Seja $\vec{x}$ um vetor qualquer. Mostre que* $\operatorname{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\vec{x} = \frac{[\vec{x},\vec{u},\vec{v}]}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2} \cdot \vec{u}\wedge\vec{v}$. *Suponha que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ e $\vec{t} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v}$ são também **l.i.**. Mostre que,* $\operatorname{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\vec{x} = \operatorname{proj}_{\vec{w}\wedge\vec{t}}\vec{x}$.

Exercício 23. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, vetores. Mostre que:*

(1) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})$
(2) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{w})\vec{u}$
(3) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w} + (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v}$

Exercício 24. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$, vetores. Mostre que* $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \bullet \left(\vec{w} \wedge \vec{t}\right) = \begin{vmatrix} \vec{u} \bullet \vec{w} & \vec{u} \bullet \vec{t} \\ \vec{v} \bullet \vec{w} & \vec{v} \bullet \vec{t} \end{vmatrix}$.

Exercício 25. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. Mostre que* $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \operatorname{sen}\left(\operatorname{ang}(\vec{u},\vec{v})\right)$.

Exercício 26. *A medida angular entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é $\frac{\pi}{3}$, e suas normas são, respectivamente, 1 e 2. Sendo $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$, calcule a norma de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.*

Exercício 27. *O lado do quadrado $ABCD$ mede 2, AC é diagonal e M é ponto médio de BC. Calcule* $\|\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DB}\|$.

Exercício 28. *Os pontos A, B e C formam um triângulo, e P e Q são tais que $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$ e $3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$. Mostre que B, P e Q formam triângulo e calcule a razão entre as áreas de $\triangle BPQ$ e $\triangle ABC$.*

Exercício 29. *Resolva os sistemas:*

(1) $\begin{cases} \vec{x} \wedge (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} \\ \vec{x} \bullet (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \vec{x} \bullet \left(2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}\right) = 9 \\ \vec{x} \wedge \left(-\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}\right) = -2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \end{cases}$

Exercício 30. *Determine $\vec{x}$ de norma $\sqrt{3}$, ortogonal a $(1,1,0)$ e a $(-1,0,1)$ e que forma ângulo agudo com $\vec{\jmath}$.*

Exercício 31. *A medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$, e o vetor $\vec{w}$, de norma 4, é ortogonal a ambos. Sabendo que $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] > 0$, calcule $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.*

Exercício 32. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, vetores.*

(1) Mostre que $\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$.

*(2) Mostre que, se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são **todos** não nulos e $\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{w}$ e $\vec{v} \perp \vec{w}$.*

Exercício 33. *Para $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, vetores, $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z \in \mathbb{R}$, mostre que*

$$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) \wedge (x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{vmatrix} (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ x & z \end{vmatrix} (\vec{u} \wedge \vec{w}) + \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ y & z \end{vmatrix} (\vec{v} \wedge \vec{w}) .$$

Exercício 34. *Para $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, vetores, $A = (a_{ij})$, matriz real 3×3, mostre que*

$$\left[a_{11}\vec{u} + a_{21}\vec{v} + a_{31}\vec{w}\ ,\ a_{12}\vec{u} + a_{22}\vec{v} + a_{32}\vec{w}\ ,\ a_{13}\vec{u} + a_{23}\vec{v} + a_{33}\vec{w}\right] = \det A \cdot [\vec{u},\vec{v},\vec{w}].$$

Exercício 35. *Prove que* $[\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{u}] = 2[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

Exercício 36. *Sendo $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 6$, calcule* $[2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}, -\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - 3\vec{w}]$.

Exercício 37. *Sejam $ABCD$ um tetraedro, $P = A + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $Q = B - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ e $R = C + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Mostre que $PQRD$ forma tetredro e determine a razão entre os volumes de $PQRD$ e $ABCD$.*

9ª.LISTA DE EXERCÍCIOS – COORDENADAS AOS PONTOS DO ESPAÇO

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES

Exercício 1. *Dados os pontos* $A = (2, -2, 3)$ *e* $B = (1, 1, 5)$*, e o vetor* $\vec{v} = (1, 3, 4)$*, calcular:*
(1) $A + 3\vec{v}$ *(2)* $\overrightarrow{BA} - \vec{v}$ *(3)* $B + 2\overrightarrow{AB}$ *(4)* $2\vec{v} - 3\overrightarrow{AB}$

Exercício 2. *Dados os pontos* $A = (3, -4, -2)$ *e* $B = (-2, 1, 0)$*, determinar o ponto* N *pertencente ao segmento* $\overline{AB}$ *tal que* $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

Exercício 3. *Dados os pontos* $A = (1, -2, 3)$ $B = (2, 1, 4)$ *e* $C = (-1, -3, 1)$*, determinar o ponto* D *tal que* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Exercício 4. *Sendo* $A = (2, -5, 3)$ *e* $B = (7, 3, -1)$ *vértices consecutivos de um paralelogramo* $ABCD$ *e* $M = (4, -3, 3)$ *o ponto de intersecção das diagonais, determinar os vértices* C *e* D.

Exercício 5. *Determinar os três vértices de uma triângulo, sabendo que os pontos médios de seus lados são* $M = (5, 0, -2)$*,* $N = (3, 1, -3)$ *e* $P = (4, 2, 1,)$.

Exercício 6. *Sendo* $A = (-2, 1, 3)$ *e* $B = (6, -7, 1)$ *extremidades de um segmento, determinar:*
(1) os pontos C*,* D *e* E*, nesta ordem, que dividem o segmento* $\overline{AB}$ *em quatro partes de mesmo comprimento;*
(2) os pontos F *e* G*, nesta ordem, que dividem o segmento* $\overline{AB}$ *em três partes de mesmo comprimento.*

Exercício 7. *Dados os pontos* $A = (-1, 0, 5)$*,* $B = (2, -1, 4)$ *e* $C = (-4, 7, 2)$*, determinar* x *tal que* $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BP}$ *sejam ortogonais, sendo* $P = (x, 0, x - 3)$.

Exercício 8. *Provar que os pontos* $A = (-1, 2, 3)$*,* $B = (-3, 6, 0)$ *e* $C = (-4, 7, 2)$ *são vértices de um triângulo retângulo.*

Exercício 9. *Dados os pontos* $A = (m, 1, 0)$*,* $B = (m - 1, 2m, 2)$ *e* $C = (1, 3, -1)$*, determinar* m *de modo que o triângulo* ABC *seja retângulo em* A*. Calcule a área do triângulo.*

Exercício 10. *Prove que os pontos* $A = (3, 4, 4)$*,* $B = (2, -3, 4)$ *e* $C = (6, 0, 4)$ *são vértices de um triângulo. Determinar o ângulo interno ao vértice* B.

Exercício 11. *Dados os pontos* $A = (3, 4, -2)$*,* $B = (1, 2, 4)$ *e* $C = (2, 1, 6)$*, determinar o ponto* ***simétrico*** *a* A *com relação à reta que passa por* B *e* C.

Exercício 12. *Suponha que* $A = (a, b, c)$*,* $B = (x, y, z)$ *e* $C = (p, q, r)$.

(1) Mostre que, se A*,* B *e* C *estão alinhados, então* $\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = 0$.

(2) Apresente exemplo no qual o determinante citado é nulo mas A*,* B *e* C ***não estão alinhados****.*
(3) Tente apresentar critério para obter a equivalência com "estarem alinhados". Procure obter algum que envolva determinante(s).

Para os exercícios a seguir, consideremos $ABCD$ um tetraedro e tomemos a base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ e o sistema de coordenadas $\Sigma = (A, \mathcal{B})$. Sejam P, Q, R, S, T e U os pontos médios das arestas $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente; enquanto E, F, G e H são os baricentros das faces ΔBCD, ΔACD, ΔABD e ΔABC, respectivamente.

Exercício 13. *Determine as coordenadas* $B, C, D, E, F, G, H, P, Q, R, S, T$ *e* U *no sistema* Σ.

Exercício 14. *Uma* ***mediana do tetraedro*** *é o segmento de reta determinado por um vértice e o baricentro da face oposta. Mostre que todas as* **4** ***(quatro)*** *medianas do tetraedro* $ABCD$ *se encontram num mesmo ponto, que será chamado de* ***centróide*** *do tetraedro* $ABCD$.

Exercício 15. *Uma* ***bimediana do tetraedro*** *é o segmento determinado pelos pontos médios de duas arestas opostas. Mostre que todas as* **3** ***(três)*** *bimedianas do tetraedro* $ABCD$ *se encontram no seu centróide.*

Exercício 16. *Se* $A = (x_1, y_1, z_1)$*,* $B = (x_2, y_2, z_2)$*,* $C = (x_3, y_3, z_3)$ *e* $D = (x_4, y_4, z_4)$*. Supondo que* $ABCD$ *formam um tetraedro, determine fórmula para o centróide do tetraedro* $ABCD$.

10ª.LISTA DE EXERCÍCIOS – RETAS E PLANOS

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES

Exercício 1. *Verifique se os pontos abaixo pertencem à reta* $r\colon X = (1,0,1) + \lambda(2,1,1)(\lambda \in \mathbb{R})$.

(1) $(4,1,-1)$ *(2)* $(3,1,2)$ *(3)* $(-1,-1,0)$

Exercício 2. *Ache equações paramétricas da reta que passa por* $A = (3,3,3)$ *e é paralela à reta* $\overleftrightarrow{BC}$, *sendo* $B = (1,1,0)$ *e* $C = (-1,0,-1)$.

Exercício 3. *Dados a reta* $r\colon X = (1,0,0) + \lambda(1,1,1)$ *e os pontos* $A = (1,1,1)$, $B = (0,0,1)$, *ache o ponto de* r *equidistante de* A *e* B.

Exercício 4. *Calcule a distância do ponto* $P = (1,0,1)$ *à reta* $r\colon X = (0,0,0) + \lambda(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})(\lambda \in \mathbb{R})$.

Exercício 5. *Mostre que os pontos cujas coordenadas satisfazem o sistema de equações*

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

formam um reta. Explicite uma equação vetorial desta.

Exercício 6. *Mostre que as equações*

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{1-y}{2} = z + 1$$

descrevem uma reta. Exiba equação vetorial e sistema de equações paramétricas para essa reta.

Exercício 7. *Dados os pontos* $A = (1,2,1)$ *e* $B = (3,0,-1)$, *verifique se são concorrentes as retas* $\overleftrightarrow{AB}$ *e* $r\colon X = (4,1,0) + \lambda(1,1,1)$ *(para* $\lambda \in \mathbb{R}$*). Se forem, determine o ponto de interseção.*

Exercício 8. *Verifique se as retas* r *e* s *são concorrentes e, se forem, obtenha o ponto de interseção.*

(1) $r\colon \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \quad (\text{para } \lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ $s\colon \begin{cases} x = 9 - 4\mu \\ y = 2 + \mu \quad (\text{para } \mu \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 2\mu \end{cases}$

(2) $r\colon \begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 1 + 8\lambda \quad (\text{para } \lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$ $s\colon x - 1 = y - 4 = z$

(3) $r\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = z$ $s\colon x = \frac{y}{3} = \frac{1+z}{2}$

(4) $r\colon X = (3,-1,2) + \lambda(-2,3,1)$ *(para* $\lambda \in \mathbb{R}$*)* $s\colon X = (9,-10,-1) + \mu(4,-6,-2)$ *(para* $\mu \in \mathbb{R}$*)*

Exercício 9. *Sejam* P *e* r *a reta que passa pelo ponto* A *e é paralela ao vetor* $\vec{v} \neq \vec{0}$. *Mostre que* $Q = A + \mathrm{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{AP}$ *é o ponto de* r *mais próximo de* P. *Mostre também que, se* $B \in r$, *então* $Q = B + \mathrm{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{BP}$. *Determine fórmula para a distância de* P *à reta* r.

Exercício 10. *A altura e a mediana relativas ao vértice* B *do triângulo* ΔABC *estão contidas, respectivamente, em* $r\colon X = (-6,0,3) + \lambda(3,2,0)$ *(para* $\lambda \in \mathbb{R}$*) e* $s\colon X = (0,0,3) + \mu(3,-2,0)$ *(para* $\mu \in \mathbb{R}$*). Sendo* $C = (4,-1,3)$, *determine* A *e* B.

Exercício 11. *Sejam* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *dois vetores l.i.,* r *a reta que passa pelo ponto* A *e é paralela ao vetor* $\vec{u}$ *e* s *a reta que passa pelo ponto* B *é paralela ao vetor* $\vec{v}$. *Uma vez que* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ *é base para* $\mathbb{V}^3$, *temos que existem* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tais que* $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{u} \wedge \vec{v}$. *Mostre que:*

(1) $\gamma = \frac{[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2}$ *e* $\gamma\vec{u} \wedge \vec{v} = \mathrm{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\overrightarrow{AB}$;

(2) se $P = A + \alpha\vec{u}$ *e* $Q = B - \beta\vec{v}$, *então* $P \in r$, $Q \in s$ *e* $\overrightarrow{PQ}$ *é ortogonal a* r *e* s.

Conclua que a distância entre as retas r *e* s *é* $\frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$. *Discuta a situação na qual* $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$.

Exercício 12. *Verifique que as duas retas:*

$$r\colon X = (1,1,1) + \lambda(1,0,1),\ \lambda \in \mathbb{R},\ e$$
$$s\colon Y = (1,3,-1) + \mu(-1,0,1),\ \mu \in \mathbb{R}.$$

são reversas, determine os extremos no segmento que é ortogonal a r *e a* s *e a distância de* r *a* s.

Exercício 13. *Dadas as retas*

$$r\colon \begin{cases} x - my + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s\colon x = \frac{y}{m} = z \qquad t\colon \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

calcule m em cada caso:

(1) r e s são paralelas
(2) r e t são concorrentes
(3) r e s são reversas
(4) r, s e t são paralelas a um mesmo plano
(5) s e t são coplanares

Exercício 14. *Obtenha uma equação geral do plano π que passa por $A = (0, 1, 2)$ e tem vetores diretores $\vec{u} = (4, 1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$.*

Exercício 15. *Obtenha uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A = (1, 0, 2)$ e tem vetor normal $\vec{n} = (1, -1, 4)$.*

Exercício 16. *Escreva equações paramétricas para a reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$, onde $\pi_1 \colon 2x - y - 3 = 0$ e $\pi_2 \colon 3x + y + 2z - 1 = 0$.*

Exercício 17. *Escreva uma equação vetorial da reta que passa por $A = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao plano $\pi \colon 2x + y - z = 2$.*

Exercício 18. *Obtenha a interseção da reta r com o plano π (se houver):*

(1) $r\colon X = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 3)$ *(para $\lambda \in \mathbb{R}$)* $\quad \pi\colon x + y + z = 20$
(2) $r\colon X = (0, 1, 1) + \mu(2, 1, -3)$ *(para $\mu \in \mathbb{R}$)* $\quad \pi\colon X\colon (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 1)$ *(para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)*
(3) $r\colon \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{8}$ $\quad \pi\colon 2x + y - z - 6 = 0$
(4) $r\colon x - 2 = 3 - y = \frac{z-1}{4}$ $\quad \pi\colon X = (-4, -6, 2) + \lambda(2, 1, 3) + \mu(3, 3, 2)$ *(para $\lambda\mu \in \mathbb{R}$)*

Exercício 19. *Ache uma equação geral do plano σ que passa pelo ponto $P = (1, 0, 0)$ e **contém** a reta $r\colon \{\ x = 2, \quad y = \lambda, \quad z = 2 + \lambda\ $, $(\lambda \in \mathbb{R})$.*

Exercício 20. *Sejam P e π o plano que passa pelo A é ortogonal ao vetor $\vec{n}$ (onde $\vec{n} \neq \vec{0}$). Mostre que $Q = P + \text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PA}$ é o ponto de π mais próximo de P. Mostre também que, se $B \in \pi$, então $P + \text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PB} = Q$.*

Exercício 21. *Se $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$ (onde $(a, b, c) \neq \vec{0}$) e $P = (\alpha, \beta, \gamma)$, determine a distância de P ao plano π.*

Exercício 22. *Calcule a distância do ponto $P = (1, 2, -1)$ ao plano $\pi\colon 3x - 4y - 5z + 1 = 0$.*

Exercício 23. *Calcule a distância de $P = (1, 3, -4)$ ao plano*

$$\pi\colon X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(-1, 0, 3)(\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Exercício 24. *Qual o ponto da reta $s\colon X = (-1, 3, 3) + \lambda(-1, 2, 3)\ (\lambda \in \mathbb{R})$, que está no plano $\pi\colon x + y + z = 1$?*

Exercício 25. *A medida do ângulo θ entre uma **reta** r **e um plano** π é calculada pela fórmula*

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{n}\|.\|\vec{u}\|},$$

para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, e onde $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano π e $\vec{u}$ é um vetor diretor da reta r.

Calcule a medida do ângulo θ entre $r\colon \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$, *e* $\pi\colon y + z - 10 = 0$.

Exercício 26. *Mostre que as retas r e s determinam um plano π e obtenha uma equação geral de π.*

(1) $r\colon x - 1 = y = 2z$ *e* $s\colon x - 1 = y = z$ $\qquad$ *(2)* $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$ *e* $s\colon \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{4}$

Exercício 27. *Estude a posição relativa entre r e π.*

(1) $r\colon X = (1, 1, 1) + \lambda(3, 2, 1)$ *e* $\pi\colon X = (1, 1, 3) + \mu(1, -1, 1) + \nu(0, 1, 3)$
(2) $r\colon X = (2, 2, 1) + \lambda(3, 3, 0)$ *e* $\pi\colon X = (1, 0, 1) + \mu(1, 1, 1) + \nu(0, 0, 3)$
(3) $r\colon x - 2y = 3 - 2z + y = 2x - z$ *e* $\pi\colon X = (1, 4, 0,) + \mu(1, 1, 1) + \nu(2, 1, 0)$
(4) $r\colon X = (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$ *e* $\pi\colon x - y - z = 2$
(5) $r\colon \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z+3}{3}$ *e* $\pi\colon 3x - 6y - z = 0$

Exercício 28. *Nos casos nos quais houver intersecção não vazia entre r e π, determine o(s) ponto(s) na intersecção para os casos no exercício anterior.*

Exercício 29. *Determine o ponto simétrico a $P = (1, -2, 0)$ com relação ao plano $\pi\colon 4x - 4y - 2z = 3$.*

Exercício 30. *Um cubo tem diagonal $\overline{AB}$ e uma das faces está contida no plano $\pi\colon x - y = 0$. Sabendo que $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, 3, \sqrt{2})$, determine os demais vértices.*

Exercício 31. *Uma pirâmide tem por base um retângulo $ABCD$ e seu vértice $P = (1, 1, 1)$ projeta-se ortogonalmente sobre o centro da base. A face ΔPAB está contida em $\pi_1\colon x - y + z = 0$ e a face ΔPCD, em $\pi_2\colon x + y + z - 3 = 0$. Determine B, C e D, sabendo que $A = (1, 0, 0)$ e que o ponto $Q = (1, -1, 0)$ pertence ao plano da base.*