UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA (UFBA)

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISCIPLINA: MATA02 - CÁLCULO A

UNIDADE III - LISTA DE EXERCÍCIOS

Aproximações lineares e diferenciais

(1) Estime o valor dos seguintes números:

(a) $\sqrt{1,01}$ (c) $\ln(1,07)$ (e) $\sqrt{4,0000000002}$ (g) $\operatorname{sen} 59$

(b) $\sqrt{0,99}$ (d) $\sqrt[5]{0,95}$ (f) $(1,97)^6$ (h) $\operatorname{arctg}(1,002)$.

(2) Explique por que as seguintes aproximações são razoáveis: $\sec(0,08) \approx 1$ e $(1,01)^6 \approx 1,06$.

(3) A equação que governa o movimento de um pêndulo é dada por $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$, onde g é a aceleração da gravidade e l é o comprimento da haste. Para pequenas amplitudes, é razóavel aproximar esta equação por $\theta'' = -\dfrac{g}{l}\theta$? Por que?

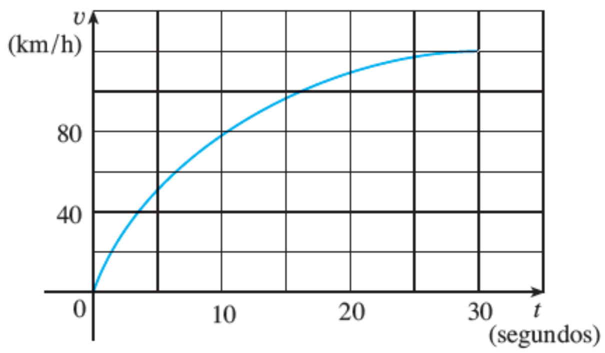
(4) Estabeleça as seguintes regras para se trabalhar com diferenciais, sendo u e v funções de x:

(a) $d(u+v) = du + dv$

(b) $d(uv) = udv + vdu$.

Introdução às integrais e o Teorema Fundamental do Cálculo

(1) O gráfico da velocidade de um carro em aceleração a partir do repouso até uma velocidade de 120 km/h em um período de 30 segundos é mostrado na figura abaixo:



Utilize *somas de Riemann* para estimar a distância (velocidade $\times$ tempo) percorrida durante esse período.

(2) Expresse os limites seguintes como uma integral definida no intervalo dado:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i^3 + x_i \operatorname{sen}(x_i)\right) \Delta x, \quad [0,\pi]$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^*}\, \Delta x, \quad [1,4].$

(3) Calcule as integrais a seguir interpretando cada uma em termos de áreas:

(a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ (b) $\int_0^3 (x-1)\, dx.$

(4) Dado que $\int_4^9 \sqrt{x}\, dx = \frac{38}{3}$, calcule $\int_4^9 \sqrt{y}\, dy$ e $\int_9^4 \sqrt{x}\, dx$.

(5) Sabendo que $\int_0^{10} f(x)\, dx = 17$ e $\int_0^8 f(x)\, dx = 12$, calcule $\int_8^{10} f(x)\, dx$.

(6) Use a 1ª parte do T.F.C. para calcular a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = \int_1^x \ln t\, dt$ (c) $F(x) = \int_x^2 \cos\left(s^2\right) ds$ (e) $G(x) = \int_1^{x^4} \sec(t)\, dt$

(b) $g(y) = \int_2^y t^2 \operatorname{sen} t\, dt$ (d) $y = \int_3^{\sqrt{x}} \frac{\cos t}{t}\, dt$ (f) $z = \int_{\operatorname{tg} x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}\, dt.$

(7) Uma importante função presente na teoria física de difração das ondas de luz, que também é aplicada no planejamento de auto-estradas, é a *função de Fresnel* $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$. Calcule $F''(x)$.

(8) Use a 2ª parte do T.F.C. para calcular as seguintes integrais:

(a) $\int_{-1}^3 x^5\, dx$ (e) $\int_0^4 \left(1+3y-y^2\right) dy$ (i) $\int_0^1 \left(2^x + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$

(b) $\int_2^8 (4x+3)\, dx$ (f) $\int_3^3 \sqrt{x^5+2}\, dx$ (j) $\int_{\ln 3}^{\ln 6} 8e^s\, ds$

(c) $\int_0^4 \sqrt{x}\, dx$ (g) $\int_1^2 \frac{1+t^2}{t^4}\, dt$ (k) $\int_{-1}^1 dx$

(d) $\int_1^2 \frac{3}{t^4}\, dt$ (h) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen} t\, dt$ (l) $\int_1^{2018} \frac{1}{s}\, ds.$

(9) Considere a função $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } -\pi \le x \le 0 \\ \operatorname{sen} x, & \text{se } 0 < x \le \pi \end{cases}$. Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$.

(10) Seja $F(x) = \int_2^{2x} \frac{1}{\ln t}\, dt$.

(a) Determine $F'\left(\frac{e}{2}\right)$;

(b) F é crescente ou decrescente?

(c) O que podemos dizer sobre a concavidade de seu gráfico?

(d) **<u>Desafio:</u>** Esboce o gráfico de F.

(11) Ache a primitiva $F(x)$ de $f(x) = x^3 - 3e^x$ que satisfaz a condição $F(0) = 2$.

(12) O que está errado no seguinte cálculo? Justifique!

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\, dx = \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.$$

(13) Utilize o T.F.C para calcular as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^2 (t^2 + 3t - 1)\, dt$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{7}{1+t^2}\, dt$ (g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen} r + \operatorname{sen} 2r)\, dr$

(b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ (e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\, dx$ (h) $\displaystyle\int_0^2 2^z\, dz$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+x}{x^3}\, dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ (i) $\displaystyle\int_0^1 \cosh s\, ds.$

(14) Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int 3\, dx$ (c) $\displaystyle\int \left(3\sqrt[5]{x^2} + 3\right)\, dx$ (e) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 5x\, dx$

(b) $\displaystyle\int (ax + b)\, dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x}\, dx$ (f) $\displaystyle\int \left(5e^{7t} + e^{-t} + \cos 7t\right)\, dt.$

(15) Desenhe o conjunto A e calcule a sua área:

(a) A é a região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $0 \le x \le 2$;

(b) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1,\ x = 4,\ y = 0$ e por $y = \sqrt{x}$;

(c) $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ 0 \le x \le 2\pi \text{ e } 0 \le y \le |\operatorname{sen} x|\big\}$;

(d) A é o conjunto do plano limitado pelo eixo x, pelo gráfico de $y = x^3 - x$, sendo $-1 \le x \le 1$;

(e) A é a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2 - |x|$.

(16) Determine a função $y = y(x),\ x \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}$, $y'(0) = 0$ e $y(0) = 1$.

(17) Se $w'(t)$ for a taxa de crescimento de uma criança em quilos por ano, o que $\displaystyle\int_7^{12} w'(t)\, dt$ representa?

(18) A corrente $I(t)$ em um fio elétrico é definida como a derivada da carga $Q(t)$. O que significa a integral definida $\displaystyle\int_a^b I(t)\, dt$?

(19) A mecânica quântica prevê que a força F entre duas moléculas de gás separadas por uma distância x é dada por $F = -\dfrac{A}{x^7} + \dfrac{B}{x^{13}}$, onde A e B são constantes reais. A energia potencial V das moléculas de gás satisfaz a *equação diferencial* (equação envolvendo derivadas) $F = -\dfrac{dV}{dx}$. Além disso, $V \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow \infty$. Com base nessas informações, encontre uma fórmula para V em função de x.

(20) Encontre o número real b tal que a reta $y = b$ divida a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$ em duas regiões de mesma área.

(21) Para $x \geq 0$, definimos uma nova função $F(x)$ da seguinte forma: $F(x)$ é a área sob o gráfico da função $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$, de 0 até x.

(a) Para x e h positivos, faça um esboço da região representada por $F(x+h) - F(x)$;

(b) Usando seu esboço, verifique que
$$h \cdot f(x) > F(x+h) - F(x) > h \cdot f(x+h).$$

(c) Usando o item anterior, determine $F'(x)$ através de um limite.

Técnica de integração: mudança de variáveis

(1) Suponha f contínua em $[-1, 1]$. Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(2x-1)\,dx$, sabendo que $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 5$.

(2) Calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^5}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^0 t^2\sqrt{1+t^3}\,dt$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^5}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^0 x^2 e^{x^3}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+2x^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3s}{1+s^2}\,ds$

(g) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\,ds$

(i) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3(x^2+3)^{10}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}(x)\cos^2(x)\,dx$

(k) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}^2(x)\,dx$

(l) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3(x)\,dx$

(m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3(y)\,dy$

(n) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(z)\operatorname{sen}^5(z)\,dz.$

(3) Calcule, utilizando mudança de variáveis, as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{3x-2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5(x)\cos(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{3x}{5+6x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+4x^2)^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\sqrt{\cos x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+9x^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3(t)\sec^2(t)\,dt$

(j) $\displaystyle\int \frac{\sec^2(x)}{3+2\operatorname{tg}(x)}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \left(x + \frac{3}{x-2}\right)\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x+1}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,dt$

(q) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx$

(s) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$

(t) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$

(u) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\sqrt{5+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx.$

(4) Mostre que, para todo $a \neq 0$, vale a expressão:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \text{ sendo } C \in \mathbb{R}.$$

(5) Num cálculo com integrais, um estudante desenvolveu o seguinte raciocínio: fazendo a mudança de variável $u = \dfrac{1}{x}$ na integral $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$, obtemos

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = -\int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2} = -I,$$

concluindo daí que $I = 0$. Por outro lado, $I = \text{arctg}(1) - \text{arctg}(-1) = \dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Com isso, ele concluiu que $0 = \dfrac{\pi}{2}$. Afinal, onde é que está o erro?

(6) Mostre que a área de um círculo de raio $r > 0$ é dada por πr^2.

(7) Utilizando mudança de variável, calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x-x^2}\, dx$

(d) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$

(e) $\displaystyle\int \text{sen}\,\theta(\cos\theta+5)^7\, d\theta$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{9-(x-1)^2}\, dx$

(g) $\displaystyle\int \sqrt{9-4x^2}\, dx$

(h) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+2x+2}\, dx$

(i) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+2x+3}\, dx.$

(8) Calcule a área da região elíptica $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$, sendo $a, b > 0$.

(9) A função *logaritmo natural* é a função definida por

$$\ln x = \log_e x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \quad \text{sendo} \quad x > 0.$$

Utilize o *Teorema Fundamental do Cálculo* para verificar as seguintes propriedades:

(a) $\ln 1 = 0$;

(b) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

(c) $\ln(a\cdot b) = \ln(a) + \ln(b),\ \forall\ a, b > 0$;

(d) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b),\ \forall\ a, b > 0.$

Técnica de integração: integração por partes

(1) Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int xe^x\, dx$

(b) $\displaystyle\int x\,\text{sen}\, x\, dx$

(c) $\displaystyle\int x^2e^x\, dx$

(d) $\displaystyle\int x\ln x\, dx$

(e) $\displaystyle\int \ln x\, dx$

(f) $\displaystyle\int x^2\ln x\, dx$

(g) $\int x \sec^2 x \, dx$

(h) $\int xe^{2x} \, dx$

(i) $\int e^x \cos x \, dx$

(j) $\int e^{-2x} \operatorname{sen} x \, dx$

(k) $\int e^{-x} \cos(2x) \, dx$

(l) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx.$

(2) Calcule $\int e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt$, sendo $s > 0$ constante.

(3) Calcule o valor das seguintes integrais definidas:

(a) $\int_0^1 xe^x \, dx$

(b) $\int_1^2 \ln t \, dt$

(c) $\int_0^\pi x^3 \cos\left(x^2\right) \, dx$

(d) $\int_0^x t^2 e^{-st} \, dt$, sendo $s \neq 0$.

(4) Suponha f'' contínua em $[a, b]$. Verifique que:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t) f''(t) \, dt.$$

Técnica de integração: frações parciais

(1) Calcule:

(a) $\int \frac{1}{x^2 - 4} \, dx$

(b) $\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} \, dx$

(c) $\int \frac{x}{x^2 - 4} \, dx$

(d) $\int \frac{2x+1}{x^2 - 1} \, dx$

(e) $\int \frac{5x^2 + 1}{x - 1} \, dx$

(f) $\int \frac{x+3}{(x-1)^2} \, dx$

(g) $\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3} \, dx$

(h) $\int \frac{x^2 + 1}{(x-2)^3} \, dx$

(i) $\int \frac{x+3}{x^2 - x} \, dx$

(j) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x} \, dx$

(k) $\int \frac{1}{\cos x} \, dx$

(l) $\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} \, dx$

(m) $\int \frac{x+3}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \, dx$

(n) $\int \frac{x^5 + 3}{x^3 - 4x} \, dx$

(o) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2 - 2x} \, dx.$

(2) Determine $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}.$$

(3) Utilize o exercício anterior para calcular $\int \frac{x-3}{(x-1)^2(x+2)^2} \, dx.$

(4) Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\int \frac{4x^2 + 17x + 13}{(x-1)(x^2 + 6x + 10)} \, dx$

(b) $\int \frac{2x^2 + 4}{x^3 - 8} \, dx.$

Outras técnicas de integração

(1) Calcule $\int \operatorname{sen}(6x)\cos(x)\ dx$, utilizando a igualdade $\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)]$.

(2) Prove as seguintes identidades:

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] \quad \text{e} \quad \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right].$$

Em seguida, utilize-as para calcular as integrais:

(a) $\int \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(3x)\ dx$ (b) $\int \cos(5x)\cos(x)\ dx$.

(3) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\ dx$.

(4) Seja n um número natural, com $n \geq 2$. Verifique as seguintes *fórmulas de recorrência*:

(a) $\int \operatorname{sen}^n(x)\ dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\ dx$;

(b) $\int \cos^n(x)\ dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\ dx$.

(5) Utilize as fórmulas de recorrência para calcular as seguintes integrais:

(a) $\int \operatorname{sen}^4(x)\ dx$ (b) $\int \cos^5(x)\ dx$.

(6) Utilize a mudança de variável $u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ para calcular as integrais seguintes:

(a) $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\ dx$ (b) $\int \frac{2\operatorname{tg} x}{2 + 3\cos x}\ dx$ (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \operatorname{sen} x}\ dx$.

Integrais impróprias

(1) Determine quais das integrais abaixo são impróprias. Por quê?

(a) $\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x\ dx$ (b) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - x - 2}$ (c) $\int_0^{\infty} e^{-x^3}\ dx$.

(2) Esboce a região $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}\ ;\ x \leq 1,\ 0 \leq y \leq e^x\}$ e calcule o valor de sua área.

(3) Determine se cada integral é convergente ou divergente. Avalie aquelas que são convergentes.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2}\ dx$

(b) $\int_0^{\infty} e^{-x}\ dx$

(c) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

(d) $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}\ dx$.

(4) Se $f(t)$ é uma função contínua para $t \geq 0$, a *Transformada de Laplace* de f é a função F dada por

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt,$$

cujo domínio é o conjunto de todos os números s para os quais a integral converge. Calcule a Transformada de Laplace da função $f(t) = t$.

(5) Verifique os seguintes itens:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx$ é divergente;

(b) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} x\, dx = 0$;

(c) A seguinte definição está correta? Justifique!

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx := \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\, dx.$$

Exercícios diversos sobre integrais

(1) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^4 |x-3|\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (|x|+1)\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4+x^2+1}\, dx.$

(2) Calcule:

(a) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{e^t}{1+e^{2t}}\, dt$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+6y+8}\, dy$

(f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+10}\, dx$

(g) $\displaystyle\int e^{3z} \cos(2z)\, dz$

(h) $\displaystyle\int x^3 \operatorname{tg}(x^4)\, dx$

(i) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\, dx$

(j) $\displaystyle\int \sqrt{\cos(3t)}\operatorname{sen}(3t)\, dt$

(k) $\displaystyle\int (2x+1)e^{x^2}e^{x}\, dx$

(l) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx.$

Algumas aplicações da integral

(1) Uma partícula de massa m desloca-se sobre o eixo x com função de posição $x = x(t)$, em que $x(t)$ é suposta derivável até a segunda ordem em $[t_0, t_1]$. Suponha que a componente, na direção do deslocamento, da *força resultante* $\vec{F}$ que atua sobre a partícula seja $f(x)$, com f contínua em $[x_0, x_1]$, em que $x_0 = x(t_0)$ e $x_1 = x(t_1)$. Sabendo que o *trabalho* τ realizado por $\vec{F}(x) = f(x)\vec{i}$ de

x_0 a x_1 é dado por $\tau = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx$, verifique que

$$\tau = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

ou seja, τ é a *variação da energia cinética*, onde v_0 e v_1 são as velocidades nos instantes t_0 e t_1, respectivamente.

(2) Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Denote por A a região do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, pelo eixo x e pelo gráfico de $y = f(x)$. O *volume* V do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto A, é dado por

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx.$$

Calcule V nas seguintes situações:

(a) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 1 \leq x \leq 2, \ \dfrac{1}{x} \leq y \leq x\right\}$.

(b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 1, \ \sqrt{x} \leq y \leq 3\right\}$.

(c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + (y - 2)^2 \leq 1\right\}$.

(3) Suponha $f(x) \geq 0$ e contínua em $[a, b]$, com $a > 0$, e considere o conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

O *volume* V do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto A, é o número

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Utilize tal fórmula, conhecida como o *método das cascas cilíndricas*, para calcular o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, dos seguintes conjuntos:

(a) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq 0, \ x^2 \leq y \leq 4\right\}$.

(b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq x \leq \pi, \ 0 \leq y \leq \operatorname{sen} x\right\}$.

(4) Calcule, de duas formas diferentes, o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq \dfrac{x^2}{2} + 1 \text{ e } y \geq x^2 - 1\right\}$.

(5) Calcule o volume do sólido cuja base é o semicírculo $x^2 + y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$, e cujas secções perpendiculares ao eixo x são triângulos equiláteros.

(6) Calcule o volume do sólido cuja base é o quadrado de vértices $(0, 0), (1, 1), (0, 1)$ e $(1, 0)$ e cujas secções perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles de altura $x - x^2$.

(7) Considere a superfície S obtida pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico de uma função f, com derivada contínua e $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Sabendo que a *área* da superfície S é dada por

$$\text{Área}(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

calcule a área das superfícies geradas pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$.

(b) $f(x) = x^2$, com $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.

(8) Seja f uma função com derivada contínua em $[a, b]$. Pode ser provado, pelo teorema do valor médio, que o *comprimento* L da curva $y = f(x)$ é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Com base nestas informações, calcule o comprimento da curva $y = \dfrac{x^2}{2}$, entre $x = 0$ e $x = 1$.

(9) O *centro de massa* (x_c, y_c) de uma região da forma $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a \leq x \leq b, \ f(x) \leq y \leq g(x)\}$, onde f e g são funções contínuas em $[a,b]$ e tais que $f(x) \leq g(x)$ em $[a,b]$, é dado por

$$x_c = \frac{\displaystyle\int_a^b x[g(x) - f(x)]\, dx}{\text{Área}(A)} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b [g(x) - f(x)][g(x) + f(x)]\, dx}{\text{Área}(A)}.$$

Com tais informações, encontre o centro de massa da figura limitada pela reta $y = 1$ e pela parábola $y = x^2$.

GABARITO

Aproximações lineares e diferenciais

(1) (b) $\sqrt{0,99} \approx 0,995$, (g) $\operatorname{sen} 59 \approx 0,857$.

Introdução às integrais e o Teorema Fundamental do Cálculo

(2) (a) $\displaystyle\int_0^\pi (x^3 + x \operatorname{sen} x)\, dx$; **(3)** (a) $\dfrac{\pi}{4}$, (b) $\dfrac{3}{2}$; **(4)** $\dfrac{38}{3}$ e $-\dfrac{38}{3}$; **(5)** 5;

(6) (a) $\ln x$, (b) $g'(y) = y^2 \operatorname{sen} y$, (c) $-\cos(x^2)$, (d) $\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2x}$, (e) $4x^3 \sec(x^4)$;

(7) $F''(x) = \pi x \cos\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right)$; **(8)** (a) $\dfrac{364}{3}$, (b) 138, (c) $\dfrac{16}{3}$, (d) $\dfrac{7}{8}$, (e) $\dfrac{20}{3}$, (f) 0, (g) $\dfrac{19}{24}$, (h) $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$, (i) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{\ln 2}$, (j) 24, (k) 2, (l) $\ln(2018)$;

(11) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - 3e^x + 5$;

(13) (a) $\dfrac{20}{3}$, (b) 2, (c) $\dfrac{7}{8}$, (d) $\dfrac{7\pi}{4}$, (e) $\dfrac{20}{3}$, (f) $\dfrac{\pi}{6}$, (g) $\dfrac{5}{4}$, (h) $\dfrac{3}{\ln 2}$, (i) $\dfrac{e^2 - 1}{2e}$;

(14) (a) $3x + C$, (b) $\dfrac{ax^2}{2} + bx + C$, (c) $\dfrac{15}{7}\sqrt[5]{x^7} + 3x + C$, (d) $\dfrac{x^2}{2} + \ln|x| + C$, (e) $-\dfrac{1}{5}\cos(5x) + C$, (f) $\dfrac{5}{7}e^{7t} - e^{-t} + \dfrac{\operatorname{sen} 7t}{7} + C$;

(15) (a) 1, (b) $\dfrac{14}{3}$, (c) 4, (d) $\dfrac{1}{2}$, (e) $\dfrac{7}{3}$; **(16)** $y = e^{-x} + x$;

(17) O aumento do peso da criança (em quilos) entre as idades de 7 a 12 anos.

Técnica de integração: mudança de variáveis

(1) $\dfrac{5}{2}$; **(2)** (a) $\dfrac{15}{64}$, (b) $\dfrac{2}{9}$, (c) $\dfrac{11}{192}$, (d) $\dfrac{1}{3}(1-e^{-1})$, (e) $\dfrac{3\sqrt{3}-1}{6}$, (f) $\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$, (g) $\dfrac{8}{3}$, (h) $\sqrt{2}-1$, (i) 0, (j) $\dfrac{7}{24}$, (k) $\dfrac{11}{24}$, (l) $\dfrac{11}{24}$, (m) $\dfrac{11}{24}$, (n) $\dfrac{1}{384}$.

(3) Sendo $C \in \mathbb{R}$, temos que:

(a) $\dfrac{2}{9}\sqrt{(3x-2)^3}+C$

(b) $\dfrac{1}{6}\operatorname{sen}^6(x)+C$

(c) $\dfrac{1}{4}\ln(5+6x^2)+C$

(d) $-\dfrac{1}{8(1+4x^2)}+C$

(e) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+e^x)^3}+C$

(f) $\dfrac{1}{\cos x}+C$

(g) $-\dfrac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+C$

(h) $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(3x)+C$

(i) $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 t+C$

(j) $\dfrac{1}{2}\ln|3+2\operatorname{tg}x|+C$

(k) $\dfrac{x^2}{2}+3\ln|x-2|+C$

(l) $2x+\ln|x+1|+C$

(m) $\dfrac{(x+1)^2}{2}-2(x+1)+\ln|x+1|+C$

(n) $-\dfrac{1}{\ln x}+C$

(o) $-\dfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+\dfrac{3}{2}\operatorname{arcsen}(2x)+C$

(p) $\operatorname{arcsen}(e^t)+C$

(q) $\operatorname{arcsen}(\ln x)+C$

(r) $2\operatorname{arcsen}(x+1)+C$

(s) $\operatorname{sen}(\ln x)+C$

(t) $\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4)+C$

(u) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(5+\operatorname{sen}^2 x)^3}+C$.

(7) (a) $\dfrac{1}{4}\left[\operatorname{arcsen}(2x)+2x\sqrt{1-4x^2}\right]+K$, (b) $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{2}\right)+K$, (d) $\dfrac{1}{8}\left[\operatorname{arcsen}x-\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(4\operatorname{arcsen}x)\right]+K$, (g) $\dfrac{9}{4}\left[\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2x}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2x}{3}\right)\right)\right]+K$, (i) $2\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\sqrt{4-(x-1)^2}+K$;

(8) πab; **(9)** (c) Divida o intervalo de integração em $[1,ab]=[1,a]\cup[a,ab]$ e faça a mudança de variável $u=\dfrac{t}{a}$; (d) Use o item (c) e faça a mudança de variável $v=bt$.

Técnica de integração: integração por partes

(1) (a) $(x-1)e^x+K$, (b) $-x\cos x+\operatorname{sen}x+K$, (c) $e^x(x^2-2x+2)+K$, (d) $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{1}{2}\right)+K$, (e) $x(\ln x-1)+K$, (f) $\dfrac{1}{3}x^3\left(\ln x-\dfrac{1}{3}\right)+K$, (g) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+K$, (h) $\dfrac{1}{2}e^{2x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+K$, (i) $\dfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen}x+\cos x)+K$; **(2)** $-\dfrac{e^{-st}}{1+s^2}(\cos t+s\operatorname{sen}t)+K$;

(3) (a) 1, (b) $2\ln 2-1$, (d) $-\dfrac{1}{s}x^2e^{-sx}-\dfrac{2}{s^2}xe^{-sx}-\dfrac{2}{s^3}e^{-sx}+\dfrac{2}{s^3}$.

Técnica de integração: frações parciais

(1)

(a) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

(b) $-2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C$

(c) $\frac{1}{2}\ln|x^2-4|+C$

(d) $\ln|x^2-1|+\frac{1}{2}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

(e) $6\ln|x-1|+10(x-1)+\frac{5}{2}(x-1)^2+C$

(f) $\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C$

(g) $x+\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{19}{4}\ln|x-3|+C$

(h) $\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\frac{5}{2(x-2)^2}+C$

(i) $-3\ln|x|+4\ln|x-1|+C$

(j) $x-\ln|x|+3\ln|x-1|+C$

(k) $\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|+C$

(l) $-\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{3}{10}\ln|x-2|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+C$

(m) $-2\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-2|+C$

(n) $\frac{x^3}{3}+4x-\frac{3}{4}\ln|x|+\frac{35}{8}\ln|x-2|-\frac{29}{8}\ln|x+2|+C.$

(2) $A=\frac{7}{27},\ B=-\frac{2}{9},\ C=-\frac{7}{27}$ e $D=-\frac{5}{9}$;

(3) $\frac{7}{27}\ln|x-1|+\frac{6}{27(x-1)}-\frac{7}{27}\ln|x+2|+\frac{15}{27(x+2)}+K$;

(4) (a) $2\ln|x-1|+\ln(x^2+6x+10)+\operatorname{arctg}(x+3)+K$;

(b) $\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+K.$

Outras técnicas de integração

(1) $-\frac{1}{14}\cos(7x)-\frac{1}{10}\cos(5x)+C$;

(2) (a) $-\frac{1}{10}\operatorname{sen}(5x)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+K$, (b) $\frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x)+\frac{1}{8}\operatorname{sen}(4x)+K$;

(3) 0 se $m\neq n$ e π se $m=n$; **(4)** Utilize Integração por partes;

(5) (a) $\frac{3x}{8}-\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+\frac{\operatorname{sen}(4x)}{32}+K$, (b) $\frac{1}{5}\cos^4x\operatorname{sen}x+\frac{4}{15}\cos^2x\operatorname{sen}x+\frac{8}{15}\operatorname{sen}x+K$;

(6) (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-1-\sqrt{2}}\right|+K$, (b) $\ln|2\sec(x)+3|+K$.

Integrais impróprias

(2) e; **(3)** (a) $\frac{1}{12}$, (b) 1, (c) $2\sqrt{3}$, (d) Divergente; **(4)** $F(s)=\frac{1}{s^2}$, para $s>0$.

Exercícios diversos sobre integrais

(1) (a) 5, (c) 0.

Algumas aplicações da integral

(1) Aplique a *Lei de Newton* $f(x(t)) = ma(t)$, em que $a(t)$ é a aceleração no instante t.

(2) (a) $\dfrac{11\pi}{6}$, (b) $\dfrac{17\pi}{2}$, (c) $4\pi^2$; **(3)** (a) 8π, (b) $2\pi^2$; **(4)** $\dfrac{7\pi}{2}$;

(5) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}r^3$ (*Dica*: integre a área $A(x)$ da interseção do sólido com o plano perpendicular a x no ponto de abscissa x); **(6)** $\dfrac{1}{12}$;

(7) (a) $2\pi\left[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right]$, (b) $\dfrac{\pi}{32}\left[3\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)\right]$; **(8)** $\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$; **(9)** $\left(0, \dfrac{2}{5}\right)$.

`Última atualização: 23/09/2024`