UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA (UFBA)

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISCIPLINA: MATA02 - CÁLCULO A

UNIDADE II - LISTA DE EXERCÍCIOS

Derivadas: definição, interpretação geométrica e suas propriedades

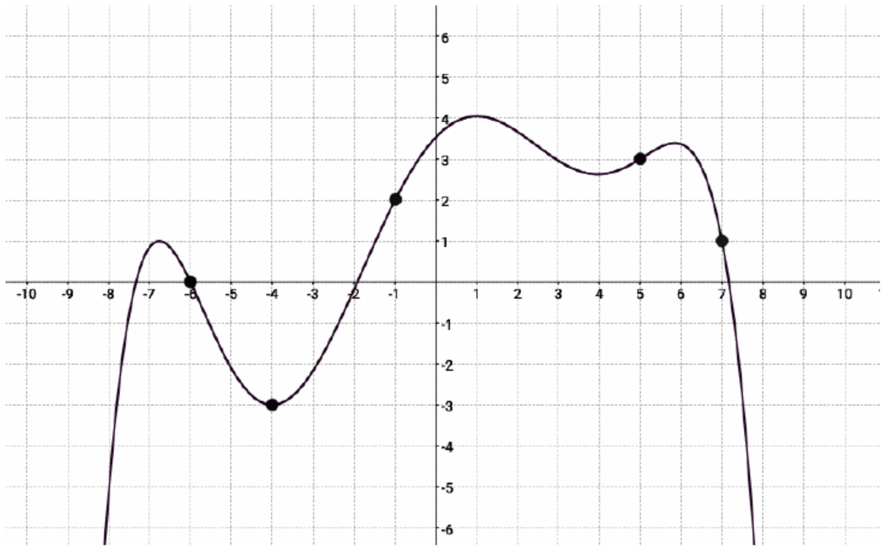
(1) Se $s(t)$ descreve a posição (em metros) de um objeto no tempo t (em segundos), calcule sua velocidade no instante t_0 dado, usando a fórmula $v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$:

(a) $s(t) = t^2$ e $t_0 = 4$ (b) $s(t) = t^{-2}$ e $t_0 = 1$ (c) $s(t) = \cos t$ e $t_0 = 0$.

(2) Se $s(t) = t^3$ descreve a posição de uma partícula no instante t, encontre a sua velocidade $v(t)$ em função de t. Qual a velocidade escalar da partícula no instante $t = 2$?

(3) Calcule $f'(p)$, pela definição, sendo $f(x) = 2x^3 - x^2$ e $p = 1$.

(4) Dado o gráfico abaixo, estime o valor da derivada em cada um dos pontos indicados, usando uma régua para traçar a reta tangente e medir o coeficiente angular:



(5) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$, sendo dados:

(a) $f(x) = x^2$ e $p = 2$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 9$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 2$

(d) $f(x) = x^2 - x$ e $p = 1$.

(6) Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 3x$ no ponto de abscissa 0.

(7) Encontre a reta que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e paralela à reta $y = 4x + 2$.

(8) Mostre que $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x < 1 \\ -x+4, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ não é derivável em $p = 1$. Esboce o gráfico de f e f'.

(9) Use a definição de derivada para provar as seguintes fórmulas:

(a) $c' = 0$, onde c é uma constante

(b) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

(c) $\left(x^4\right)' = 4x^3$

(d) $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

(10) Considere a função $g(x) = \begin{cases} x^2+2, & \text{se } x < 1 \\ 2x+1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

(a) Esboce o gráfico de g.

(b) Com base no gráfico de g, é possível dizer que g é derivável em $p = 1$?

(c) Mostre que g é derivável em $p = 1$ e calcule $g'(1)$.

(d) Mostre que g é derivável em $\mathbb{R}$ e esboce o gráfico da função $g'(x)$.

(11) A função $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é derivável em $p = 1$? Justifique!

(12) Estude a continuidade e a diferenciabilidade das funções abaixo no ponto $p = 1$:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x-1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

(13) Dado $a > 0$ e $a \neq 1$, mostre que a derivada de $f(x) = \log_a(x)$ é a função $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$.

(14) Utilizando regras de derivação, calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(2x^5 - \dfrac{x^3}{6} + 4x - 7\right)$

(b) $\left(e^{x+3}\right)'$

(c) $\left(x^5 \operatorname{sen} x\right)'$

(d) $(2\sqrt{t}\cos t)'$

(e) $(x\ln x - x)'$

(f) $(x + 2x\cos x)'$

(g) $\left(\operatorname{sen}^2(x)\right)'$

(h) $(x^2 \cdot \ln x \cdot \operatorname{sen}(x))'$

(i) $\left(\dfrac{x^2+2}{x^3}\right)'$

(j) $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)$

(k) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^3 - 4x^2 + 2}\right)$

(l) $\dfrac{d}{dx}\left(e^x \operatorname{tg} x\right)$

(m) $\left(e^{-s}\right)'$

(n) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{xe^x}{x+1}\right)$

(o) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x)$.

(15) Sejam $f(x) = \dfrac{3+x}{3-x}$ e $g(x) = \sqrt{2x-1}$. Calcule $f'(2)$ e $g'(5)$ pela definição.

(16) Se a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $|f(x) - f(t)| \leq |x - t|^2$, para todos $x, t \in \mathbb{R}$, calcule $f'(t)$.

(17) Seja f uma função derivável num ponto $p \in (0, +\infty[$. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{\sqrt{x} - \sqrt{p}}$.

(18) Calcule, onde existir, a derivada das funções abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-1}$

(b) $y = (2x^3+1)(x+2)^{-1}$

(c) $y = x^2\sqrt{x} + \dfrac{3}{x^2}$

(d) $f(s) = \dfrac{\sqrt{s}}{s+2}$

(e) $y = x \operatorname{sen} x \cos x$

(f) $f(x) = \dfrac{5}{x^3} + \dfrac{2x+1}{x}$

(g) $f(x) = x^e + e^x$

(h) $z = \log_8 x + 8^{x+2}$

(i) $g(r) = \dfrac{\sqrt[3]{r}+r}{\sqrt{r}}$.

(19) Determine a equação da reta que é perpendicular à reta $2y + x = 3$ e tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$.

(20) Calcule β de modo que $y = \beta x - 2$ seja tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 - 4x$.

(21) Determine r, sabendo que r é uma reta que passa por $(1,-1)$ e é tangente à $f(x) = x^3 - x$.

(22) Calcule a derivada indicada em cada caso:

(a) y'', quando $y = \dfrac{x}{x-1}$

(b) $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right)$

(c) $\dfrac{d^{500}}{dx^{500}}\left(x^{131} - 3x^{79} + 4\right)$.

(23) Determine em quais pontos as funções f abaixo têm derivadas, e escreva a função f':

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x, & \text{se } x \geq 1 \\ 5x-1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x+3, & \text{se } x \neq 1 \\ 3, & \text{se } x = 1 \end{cases}$.

(24) Determine f', f'' e f''' nos seguintes casos:

(a) $f(x) = 2x^4 + 8x + \sqrt{7}$

(b) $f(x) = 5x^2 - \dfrac{1}{x}$

(c) $f(x) = x|x|$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x, & \text{se } x \leq 1 \\ 5x-1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

(25) Determine a derivada de ordem n das seguintes funções:

(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

(c) $f(x) = \cos x$

(d) $f(x) = \ln x$.

(26) Seja P um polinômio de grau n. Verifique que uma raiz de P é dupla quando ela for raiz do polinômio e da sua derivada primeira, mas não for raiz da derivada segunda.

(27) Utilize o exercício anterior para encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que a equação $x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda = 0$ tenha uma raiz dupla.

(28) Encontre um polinômio de segundo grau P tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.

(29) A equação $y'' + y' - 2y = x^2$ é chamada de *equação diferencial*, pois envolve uma função desconhecida y e suas derivadas. Encontre constantes a, b e c tais que a função $y = ax^2 + bx + c$ satisfaça essa equação.

(30) Qual é o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{2025}-1}{x-1}$?

(31) Encontre os valores de m e b que tornam a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 2 \\ mx + b, & \text{se } x > 2 \end{cases} \quad \text{derivável.}$$

Regra da Cadeia

(1) Encontre $(f \circ g \circ h)(x)$, sendo $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = x + 3$.

(2) Expresse a função $(2x + x^2)^6$ como uma composta $f \circ g$ e calcule $(f \circ g)'(x)$.

(3) Calcule a derivada da função

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

em todos os pontos possíveis.

(4) Utilizando a regra da cadeia, calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{d}{dx}\left[(x^2+4)^6\right]$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left((1+\cos^2 x)^{47}\right)$

(c) $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}(x^2) + \operatorname{sen}^2 x\right)$

(d) $\left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)'$

(e) $\dfrac{d}{da}\left(8^{a^2} + \cos(8a)\right)$

(f) $\dfrac{d}{dt}\left[\left(t - \dfrac{1}{t}\right)^{3/2}\right]$

(g) $\dfrac{d}{dx}\left[(2x+1)^x\right]$

(h) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2 + e^{\sqrt{x}}}\right)$

(i) $((1+\cos^2 x)^{\operatorname{sen} x})'$

(j) $\left(x^{x^x}\right)'$

(k) $\left[\sec(\sqrt{x^2+1})\right]'$

(l) $[\ln(\ln x)]'$

(m) $(\operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x))'$.

(5) Analise se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, provando suas afirmações:

(a) A derivada da função $f(x) = \pi^x$ é $f'(x) = x\pi^{x-1}$.

(b) A derivada da função $g(x) = x^\pi$ é $g'(x) = \pi x^{\pi-1}$.

(c) Se f é ímpar, então f' é par.

(6) Sejam f e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$ e tais que $f(g(x)) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que $f'(3) = 2$ e $g(0) = 3$, calcule o valor de $g'(0)$.

(7) Considere f e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$. Suponha que $f(g(x)) = x^2$, $g(1) = 2$ e $f'(2) = -2$. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 2)$.

(8) Dada $y = e^{\alpha x}$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma raiz da equação $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, com a, b e c constantes, verifique que

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0.$$

(9) Seja $y = f(x)$ uma função derivável num intervalo aberto I, com $1 \in I$. Suponha que $f(1) = 1$ e $f'(x) = x + [f(x)]^3$, $\forall\, x \in I$. Argumente por que $f''(x)$ existe para todo $x \in I$ e calcule $f''(1)$.

Derivadas de funções inversas e derivação implícita

(1) Encontre a inversa das seguintes funções: $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = x^3 + 2$ e $h(x) = \dfrac{1+3x}{5-2x}$.

(2) Use a fórmula para a derivada de funções inversas para provar que $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

(3) Esboce o gráfico das funções arccos x e arctg x, e mostre que

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

(4) Calcule a derivada $\dfrac{dy}{dx}$:

(a) $y = x \ \operatorname{arctg}(x)$

(b) $y = \operatorname{arcsen}(3x)$

(c) $y = 3 \ \operatorname{arctg}(2x+3)$

(d) $y = \operatorname{arcsen}(e^x)$

(e) $y = x^2 \ e^{\operatorname{arctg}(2x)}$

(f) $y = \dfrac{x \ \operatorname{arctg}(x)}{\cos(2x)}$

(g) $y = e^{-3x} + \ln(\operatorname{arctg}(x))$

(h) $y = \ln(\arccos(x^3+1))$.

(5) Calcule $\dfrac{dy}{dx}$, sendo $y = f(x)$ uma função diferenciável dada implicitamente pelas equações abaixo:

(a) $x^2 - y^2 = 4$

(b) $y^3 + x^2 y = x + 4$

(c) $xe^y + xy = 3$

(d) $y + \ln\left(x^2 + y^2\right) = 4$

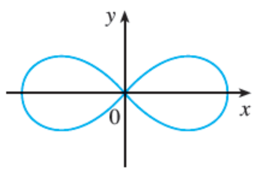
(e) $5y + \cos(y) = xy$

(f) $2y + \operatorname{sen}(y) = x$

(g) $xy + 16 = 0$

(h) $x \ \operatorname{arctg}(x) + y^2 = 4$.

(6) Encontre a equação da reta tangente à *curva lemniscata* $2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2)$ no ponto $(3, 1)$.



(7) Obtenha y'' por derivação implícita no caso em que $y = y(x)$ satisfaz $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

(8) Suponha que $y = y(x)$ seja uma função diferenciável dada implicitamente pela equação

$$y^6 - (x+y)^2 + 3x^2 = 0.$$

Encontre as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto $(0, -1)$.

(9) **Desafio:** Utilizando derivação implícita, calcule $y'(0)$, sendo $y(x) = \sqrt{5 + x^2 \sqrt{5 + x^2 \sqrt{\cdots}}}$.

(10) **Desafio:** Prove que $\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Aplicações da derivada: taxas de variação e regra de L'Hospital

(1) A equação do movimento de uma partícula é dada por $s(t) = \sqrt[3]{t+2}$, sendo s dada em metros e t em segundos. Determine:

(a) o instante em que a velocidade é de $\frac{1}{12}$ m/s.

(b) a aceleração da partícula quando $t = 2$ s.

(2) Uma bola é atirada para cima do topo de um edifício. Depois de t segundos, sua altura é dada por $h = 30 + 5t - 5t^2$. Pergunta-se:

(a) Qual a altura do edifício ?

(b) Qual a velocidade da bola no instante t ? Qual a sua velocidade inicial ?

(c) Qual a altura máxima que a bola atinge ? Quando é que ela atinge essa altura ?

(d) Quando é que a bola atinge o chão ? Com que velocidade ?

(3) Um ponto P move-se ao longo do gráfico de $y = \frac{1}{x^2+1}$ de tal modo que a sua abscissa x varia a uma velocidade constante de 5 m/s. Qual a velocidade de y no instante em que $x = 10$ m ?

(4) Um ponto desloca-se sobre a hipérbole $xy = 4$ de tal modo que a velocidade de y é $\frac{dy}{dt} = \beta$, com β constante. Calcule a aceleração da abscissa x.

(5) Uma mancha de óleo se alastra sempre circularmente. Ache a taxa de variação da área A da superfície da mancha em relação ao tempo t, sabendo que a taxa de variação do raio é 22 m/h.

(6) A medida do lado de um quadrado varia com o tempo. No instante em que o lado mede $0,5$ cm a taxa de variação da área é de 4 cm^2/s. Qual é a taxa de variação do lado em relação ao tempo neste instante ?

(7) Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a três vezes a altura. Quando a altura do monte é de $1,20$ m, a taxa de variação com que a areia é despejada é de $0,081$ m^3/min. Qual é a taxa de variação da altura do monte neste instante ?

(8) **Desafio:** Ao meio-dia o barco A está a 64 km a oeste do barco B. O barco A navega para leste a 20 km/h e o barco B navega para o norte a 25 km/h. Qual é a taxa de variação da distância entre os barcos às $13:12$ h ?

(9) Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{4x^3+x^2+3}{x^5+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3-x}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-x^2+x-1}{x^{10}-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

(f) $\displaystyle\lim_{t\to 0} (t - \operatorname{tg} t)\, t^{-3}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\cos 3x)^{1/\operatorname{sen}(x)}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$.

(10) Verifique se o seguinte cálculo está correto:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty.$$

(11) Um resultado bastante utilizado é que, para t grande o bastante, e^t é muito maior que t^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (o crescimento exponencial é muito mais rápido que o polinomial), e $\ln t$ é muito menor que $\sqrt[n]{t}$ (o crescimento logarítmico é muito mais lento que o de qualquer raiz). Prove isso, garantindo que:

(a) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^n} = +\infty$

(b) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt[n]{t}} = 0.$

(12) **<u>Desafio:</u>** A regra de L'Hospital foi publicada pela primeira vez em 1696, no livro *Analyse des Infiniment Petits*. Para mostrar a imponência do seu[1] método, o marquês de L'Hospital ilustra seu artigo calculando o seguinte limite:

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}},$$

sendo a uma constante positiva. Mostre que esse limite é igual a $\dfrac{16a}{9}$.

Aplicações da derivada: teoremas de Rolle e do valor médio, e gráfico de funções

(1) Use os Teoremas de Rolle, do Valor Intermediário e/ou do Valor Médio para mostrar os seguintes itens:

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 12$ possui pelo menos uma raiz real.

(b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 12$ tem exatamente uma raiz real.

(c) $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leq |a - b|,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

(d) $\ln x < x - 1$, para todo $x > 1$.

(e) Dois corredores iniciam uma corrida ao mesmo tempo e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida eles têm a mesma velocidade.

(f) Se um carro levou 2 h para percorrer uma estrada do quilômetro 50 ao 240, então houve pelo menos um instante no qual sua velocidade foi exatamente 95 km/h.

(2) Seja $f(x) = (x-1)^{-2}$. Mostre que $f(0) = f(2)$, mas não existe um número $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

(3) Determine os intervalos de crescimento/decrescimento das funções seguintes:

(a) $f(t) = t^5 - 10t^3$

(b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 12$

(c) $h(x) = xe^{-x}$

(d) $g(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$

(e) $f(x) = \ln\left(x^2 + 2x + 2\right)$.

[1] Na verdade, quem descobriu tal método foi o matemático suíço John Bernoulli, em 1694. Como era muito pobre, Bernoulli vendeu suas descobertas ao matemático L'Hospital, que era um poderoso marquês francês.

(4) Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão:

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

(b) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$

(c) $f(x) = xe^{-2x}$

(d) $f(t) = t^2 + \dfrac{1}{t}$

(e) $f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

(f) $f(t) = t \ln t$.

(5) Determine as assíntotas das funções abaixo, caso existam:

(a) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$

(b) $f(x) = e^x$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$

(d) $f(x) = \ln x$.

(6) Determine as coordenadas do vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$.

(7) Ache os pontos sobre a curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 11$ nas quais a reta tangente é horizontal.

(8) Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode admitir ponto de inflexão?

(9) Mostre que a cúbica $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tem um único ponto de inflexão.

(10) Determine os pontos críticos da função dada e classifique-os em ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de inflexão:

(a) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$

(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

(c) $f(x) = x^2\, e^{-5x}$.

(11) Considere a função $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$:

(a) Determine a constante a de modo que f tenha um mínimo local em $x = 2$.

(b) Determine a constante a de modo que f tenha um mínimo local em $x = -3$.

(c) Mostre que f não terá máximo local para nenhum valor de a.

(12) Ache os valores de máximo e mínimo das funções abaixo, nos intervalos indicados:

(a) $f(x) = x^4 + \dfrac{8}{3}x^3 - 16x^2$ no intervalo $[-3, 3]$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$ no intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ no intervalo $[-3, 2]$.

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ no intervalo $[1, 5]$.

(e) $f(x) = \ln(x^3 - x)$ no intervalo $\left[-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{2}\right]$.

(13) Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas:

(a) Se $f'(c) = 0$, então c é ponto de máximo ou mínimo local de f.

(b) Se $f''(c) = 0$, então c é um ponto de inflexão de f.

(14) Dadas as funções abaixo, explicite o domínio, localize suas raízes, determine os intervalos de crescimento e decrescimento, estude a concavidade, destaque os pontos de inflexão, determine as assíntotas (caso existam) e esboce o gráfico (calcule todos os limites necessários):

(a) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

(b) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$

(c) $f(x) = \dfrac{6x^2}{3x^2 + 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{(x^2+3)(x+1)}{x^2 - 1}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

(f) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}$

(g) $f(x) = x \ln x$

(h) $f(x) = \operatorname{sen}^4 x$

(i) $f(x) = e^{-1/(x+1)}$

(j) <u>**Desafio:**</u> $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$.

Aplicações da derivada: problemas de otimização

(1) A soma de 3 números positivos é 15. O dobro do primeiro mais três vezes o segundo e mais quatro vezes o terceiro é 45. Escolha esses números de modo que o produto dos 3 seja máximo.

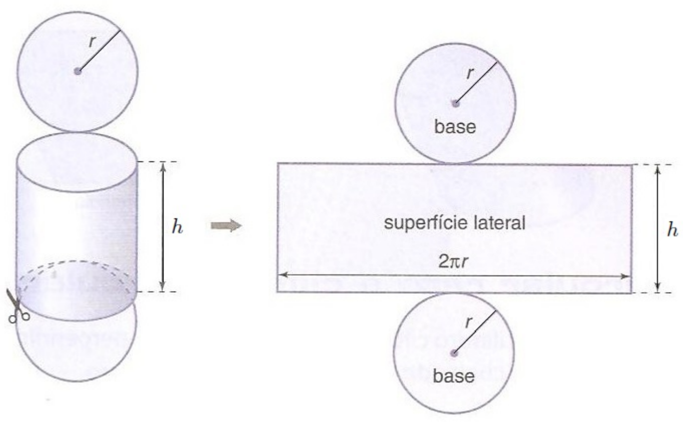
(2) Encontre o ponto do gráfico de $g(x) = \sqrt{x+1}$ que está mais próximo de $(0,0)$.

(3) Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a $(2,0)$ e $(-2,0)$ é mínima?

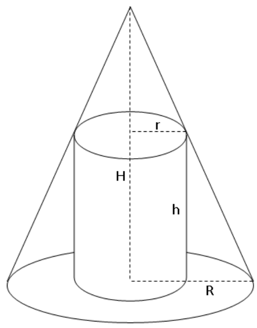
(4) Determine as dimensões do retângulo de área máxima e cujo perímetro P é dado.

(5) Determine o número real positivo cuja soma com o inverso do seu quadrado seja mínima.

(6) Se uma lata fechada com volume $16\pi\ cm^3$ deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a altura h e o raio r, se um mínimo de material deve ser usado em sua fabricação.



(7) Ache o raio r e a altura h do cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito em um cone circular reto com raio da base $R = 15$ cm e altura $H = 36$ cm.



(8) Mostre que a menor distância de um ponto (x_0, y_0) a uma reta $ax + by + c = 0$ é dada por

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(9) Uma tradicional fábrica de carros possui um lucro total mensal (em milhares de reais) estimado por $L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$, em que q representa a quantidade produzida de carros. Determine o lucro máximo e a produção que maximiza o lucro. Esboce o gráfico da função $L(q)$.

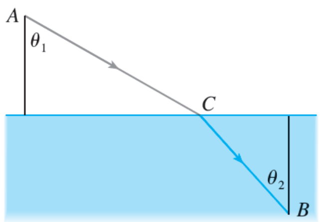
(10) Dado o triângulo retângulo de catetos 3 e 4, determine o retângulo de maior área nele inscrito, de modo que um dos lados esteja contido na hipotenusa.

(11) Determine o ponto da parábola $y = x^2$ que se encontra mais próximo da reta $y = x - 2$.

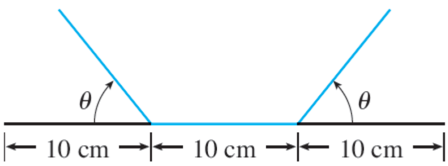
(12) Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o princípio físico de Fermat, um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre a *Lei de Snell*

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

onde θ_1 e θ_1 são os ângulos de incidência e refração, respectivamente.



(13) Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30 cm dobrando-se para cima 1/3 da folha de cada lado, fazendo-se um ângulo θ com a horizontal. Como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água da calha seja máxima?



GABARITO

Derivadas: definição, interpretação geométrica e suas propriedades

(1) (a) $8\ m/s$, (b) $-2\ m/s$, (c) 0; **(2)** $v(t) = 3t^2$ e $v(2) = 12$; **(3)** 4;

(5) (a) $y = 4x - 4$, (b) $x - 6y + 9 = 0$, (c) $4y = -x + 4$, (d) $y = x - 1$; **(6)** $y = -3x$ e $y = \frac{1}{3}x$;

(7) $y = 4x - 4$; **(10)** (c) 2;

(11) Não é derivável em $p = 1$; **(12)** (a) f é contínua em $p = 1$, porém não é derivável neste ponto;

(b) f é derivável e contínua em $p = 1$; **(13)** Utilize mudança de base e regras de derivação;

(14)

(a) $10x^4 - \frac{x^2}{2} + 4$

(b) e^{x+3}

(c) $5x^4 \operatorname{sen} x + x^5 \cos x$

(d) $\frac{1}{\sqrt{t}} \cos t - 2\sqrt{t} \operatorname{sen} t$

(e) $\ln x$

(f) $1 + 2\cos x - 2x \operatorname{sen} x$

(g) $2 \operatorname{sen} x \cos x$

(h) $2x \operatorname{sen} x \ln x + x \operatorname{sen} x + x^2 \ln x \cos x$

(i) $-\frac{x^2 + 6}{x^4}$

(j) $\frac{\theta \cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\theta^2}$

(k) $\frac{8x - 3x^2}{(x^3 - 4x^2 + 2)^2}$

(l) $e^x \left(\operatorname{tg} x + \sec^2 x\right)$

(m) $-e^{-s}$

(n) $\frac{e^x(x^2 + x + 1)}{(x+1)^2}$

(o) $-\operatorname{cossec}^2 x$.

(15) $f'(2) = 6$ e $g'(5) = \frac{1}{3}$;

(16) 0; **(17)** $2\sqrt{p}\ f'(p)$;

(18)

(a) $\frac{1}{(x-1)^2}$

(b) $\frac{4x^3 + 12x^2 - 1}{(x+2)^2}$

(c) $2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x^3}$

(d) $\frac{s + 2 - 2|s|}{2\sqrt{s}(s+2)^2}$

(e) $\operatorname{sen} x \cos x + x \cos(2x)$

(f) $-\left(\frac{15 + x^2}{x^4}\right)$

(g) $ex^{e-1} + e^x$

(h) $\frac{1}{x \ln 8} + 8^{x+2} \ln 8$

(i) $\frac{1}{|r|}\left[\frac{\sqrt{r}}{2} - \frac{1}{6} r^{-\frac{1}{6}}\right]$.

(19) $y = 2x - \frac{25}{4}$; **(20)** $\beta = -1$; **(21)** $y = -x$ ou $y = \frac{23}{4}x - \frac{27}{4}$;

(22) (a) $\frac{2}{(x-1)^3}$, (b) $6x + \frac{12}{x^5}$, (c) 0; **(23)** (a) f é derivável em $\mathbb{R}$, (b) f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;

(25) (a) $f^{(n)}(x) = e^x$, (d) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\, x^{-n}$; **(27)** $\lambda \in \{-5, 27\}$; **(28)** $P(x) = x^2 - x + 3$;

(30) 2025; **(31)** $m = 4$ e $b = -4$.

Regra da Cadeia

(1) $\dfrac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$;

(2) $f(x) = x^6$, $g(x) = 2x + x^2$ e $(f \circ g)'(x) = 12(x+1)(2x+x^2)^5$;

(3) $g'(x) = \begin{cases} 3x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$;

(4)

(b) $-94\cos x \operatorname{sen} x (1+\cos^2 x)^{46}$

(c) $2x \ \cos(x^2) + 2\operatorname{sen} x \cos x$

(d) $\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(\dfrac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$

(e) $2a \ 8^{a^2}\ln(8) - 8\operatorname{sen}(8a)$

(f) $\dfrac{3}{2}\left(t-t^{-1}\right)^{1/2}\left(1+t^{-2}\right)$

(g) $(2x+1)^x\left[\ln(2x+1) + \dfrac{2x}{2x+1}\right]$

(j) $x^{x^x} x^x\left[(1+\ln x)\ln x + \dfrac{1}{x}\right]$

(l) $\dfrac{1}{x\ln x}$

(m) $(1-\cos x)\cos(x - \operatorname{sen} x)$.

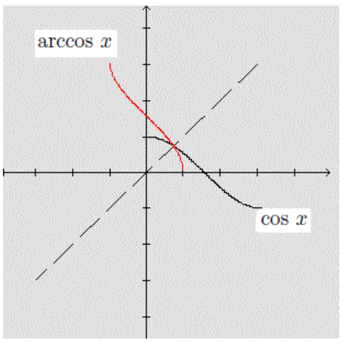
(5) (a) Falsa, (b) Verdadeira, (c) Verdadeira;

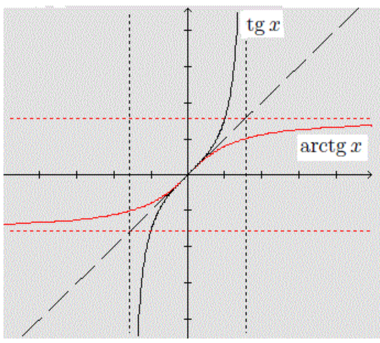
(6) $g'(0) = \dfrac{1}{2}$; **(7)** $y = -x+3$; **(9)** 7.

Derivadas de funções inversas e derivação implícita

(1) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{2}$, $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ e $h^{-1}(x) = \dfrac{5x-1}{2x+3}$;

(3)





(4)

(a) $\operatorname{arctg}(x) + \dfrac{x}{1+x^2}$

(b) $\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$

(c) $\dfrac{6}{1+(2x+3)^2}$

(d) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(e) $2xe^{\operatorname{arctg}(2x)}\left[1 + \dfrac{x}{1+4x^2}\right]$

(h) $-\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}\arccos(x^3+1)}$;

(5)

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$ $(y \neq 0)$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy-1}{3y^2+x^2}$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y+e^y}{xe^y+x}$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{x^2+y^2+2y}$

(e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{5-\operatorname{sen}(y)-x}$

(f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2+\cos(y)}$;

(6) $y = -\dfrac{9}{13}x + \dfrac{40}{13}$; **(8)** $y = \dfrac{x}{2} - 1$ e $y = -2x-1$; **(9)** 0;

(10) Considere a função $f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e note que $f'(x) = 0$.

Aplicações da derivada: taxas de variação e regra de L'Hospital

(1) (a) $6\ s$; (b) $-\dfrac{1}{36\sqrt[3]{2}}\ m/s^2$; **(3)** $-\dfrac{100}{(101)^2}$; **(4)** $\dfrac{\beta^2}{8}x^3$; **(5)** $44\pi r$; **(6)** $4\ cm/s$; **(7)** $(40\pi)^{-1} m/min$; **(8)** $-1\ km/h$; **(9)** (a) 2, (b) 0, (c) $\dfrac{99}{10}$, (d) 0, (e) $+\infty$, (f) $-\dfrac{1}{3}$, (g) 0, (h) 1, (i) 1, (j) 0;

(10) Não está correto e o limite vale 0.

Aplicações da derivada: teoremas de Rolle e do valor médio, e gráfico de funções

(1) (e) Considere a função $f(t) = S_A(t) - S_B(t)$, onde $S_A(t)$ é a função deslocamento do atleta A;

(1) (f) Aplique o T.V.M à função posição $s(t)$ do carro;

(3)

(a) Crescente em $(-\infty, -\sqrt{6}]$ e em $[\sqrt{6}, \infty)$, e decrescente em $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$;
(b) Crescente em $(-\infty, \infty)$;
(c) Crescente em $(-\infty, 1]$ e decrescente em $[1, \infty)$;
(d) Crescente em $[0, 1)$ e em $(1, 2]$, e decrescente em $(-\infty, 0]$ e em $[2, \infty)$;
(e) Crescente em $[-1, \infty)$ e decrescente em $(-\infty, -1]$.

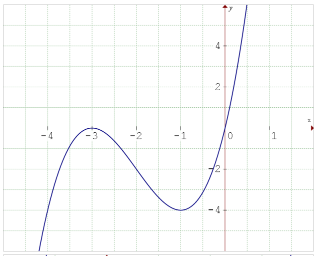
(4)

(a) Conc. para cima em $(1, +\infty)$, conc. para baixo em $(-\infty, 1)$, ponto de inflexão $x = 1$;
(b) Conc. para cima em $(1/6, +\infty)$, conc. para baixo em $(-\infty, 1/6)$, ponto de inflexão $x = 1/6$;
(c) Conc. para cima em $(1, +\infty)$, conc. para baixo em $(-\infty, 1)$, ponto de inflexão $x = 1$;
(d) Conc. para cima em $(-\infty, -1)$, conc. para baixo em $(-1, 0)$, ponto de inflexão $t = -1$;
(e) Conc. para cima em $(\ln 4, +\infty)$, conc. para baixo em $(-\infty, \ln 4)$, ponto de inflexão $t = \ln 4$;
(f) Conc. para cima em $(0, +\infty)$ e não existe ponto de inflexão.

(5) (a) $y = 2x + \dfrac{1}{4}$ e $y = -2x - \dfrac{1}{4}$, (c) $y = x$; **(6)** $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$; **(8)** Não; **(10)** (a) Pontos de mínimo local: $\{-1, 4\}$ e ponto de máximo local: 0, (b) Ponto de inflexão: 1, (c) Ponto de mínimo local: 0 e ponto de máximo local: $\dfrac{2}{5}$; **(12)** (a) $x = 0$ é máximo e $x = 2$ é mínimo;

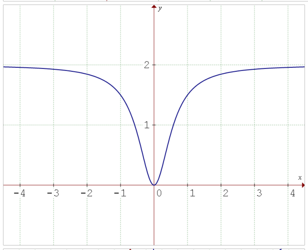
(14)

(a)

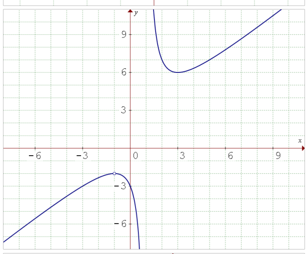


(b)

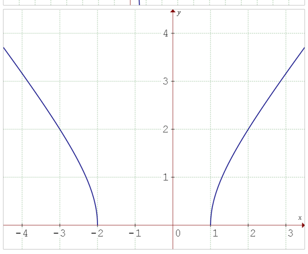
(c)



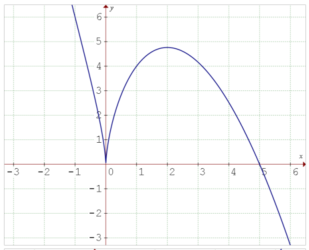
(d)



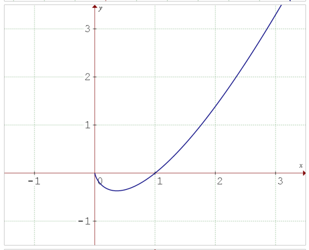
(e)



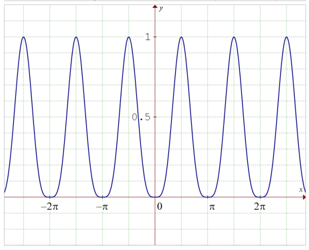
(f)



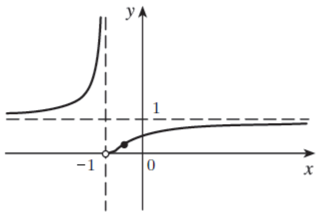
(g)



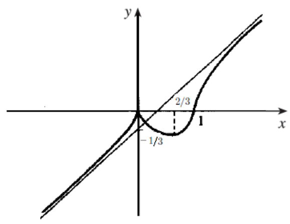
(h)



(i)



(j)



Aplicações da derivada: problemas de otimização

(1) $a = b = c = 5$; **(2)** $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; **(3)** $(0, 5)$ e $(0, -5)$; **(4)** É um quadrado; **(5)** $\sqrt[3]{2}$; **(6)** $r = 2\ cm$ e $h = 4\ cm$; **(7)** *Dica*: por semelhança de triângulos, mostre que $\dfrac{H-h}{r} = \dfrac{H}{R}$. *Resposta*: $r = 10\ cm$ e $h = 12\ cm$; **(9)** $q = 10$; **(10)** É o retângulo em que $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ é um dos vértices; **(11)** $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.

`Última atualização: 23/09/2024`